МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г.ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге**

Методические указания
по выполнению заданий
на практических занятиях
по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики
по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям)

г. Таганрог
2018

Методические указания по выполнению заданий на практических занятиях по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики

Данные методические указания составлены в помощь преподавателям и обучающимся.

В методических указаниях рассмотрены теоретические сведения, представлены практические задания, тесты для самопроверки. Главное внимание уделено подробному решению типовых задач.

Предназначены для студентов второго курса, специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям), изучающих дисциплину ЕН.01 Элементы высшей математики.

Составители:

Преподаватель ____________ С.Б. Грунская

«28 08 2018 г.

Методические указания по выполнению заданий на практических занятиях рассмотрены и одобрены на заседании ЦМК ОГСЭиЕН

Протокол № 1 от «29» 08 2018 г.

Председатель ЦМК ____________ А.А. Борисова

«28 08 201_ г.

Рецензенты:

ООО «Иностудио Солюшинс» генер. директор М.В.Болотов

АО «Красный Гидропресс» зам.начальника отдела информ. технологий С.С.Пирожков

СОГЛАСОВАНО:

Зам. директора по УМР ____________ Д. И. Стратан

«31» 08 2018 г.

Зав. УМО ____________ Т. В. Воловская

«31» 08 2018 г.

Введение

Уважаемый студент, Вы приступаете к изучению методических указаний для практических занятий по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики.

Данный курс дает возможность усвоить основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории комплексных чисел.

Изучение данного курса будет способствовать приобретению навыков решения задач высшей математики.

Данный курс составлен в соответствии с требованиями ООП по дисциплине математического и общего естественнонаучного учебного цикла ЕН.01 Элементы высшей математики по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Цель и задачи освоения дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики

В результате изучения данной дисциплины Вы должны

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики

Процесс изучения дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с программой ФГОС СПО по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям):

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы цифровых устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции.

ПК 1.4. Проводить измерения параметров проектируемых устройств и определять показатели надежности.

ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

Алгоритм выполнения практических занятий

При выполнении практических занятий следует придерживаться следующего алгоритма действий:

1. Ознакомиться с решением типовой задачи;
2. Выполнить предложенные задачи по образцу;
3. Выполненные работы необходимо предоставить преподавателю в письменном виде.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 1. Действия над матрицами.

Цели занятия: Научиться выполнять действия над матрицами.

Ход занятия

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над матрицами**

Пример. Найти матрицу транспонированную данной.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}, \quad A^T=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

2. $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}, \quad B^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}.$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}.$

2. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.

3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\end{pmatrix}.$

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Примеры.

1. $-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 0\\ 2 & -4 & -8\\ -4 & 2 & -6\end{pmatrix}.$

2. Найти 2A-B, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}.$

$$2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}.$$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}.$ Найти $C=-3A+4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad C=AB.$

Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

$$c_{12} = 0-2+3=1, \quad c_{23} = 0+0+1=1, \quad c_{21} = 0-3+1=-2.$$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

Найти AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$

Найти AB и BA.

$AB = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ – не имеет смысла.

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить матрицу $C = 6A - B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B. Найти $C = 3A + 5B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -5 & 10 & 6 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы A и B. Найти $C=6A-2B$, если

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 5 & -4 & 8 & 10 & -1 \\ -2 & -6 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы A и B. Найти $C=6(A+7B)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & -1 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -5 & -13 & 20 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Даны матрицы A и B. Найти $C=-10(3A-B)$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -20 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 73 & -5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу $C=A+\lambda E$, где λ – некоторое число, E – единичная матрица, A – заданная матрица.

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & 5 & -4 \\ 1 & 3 & 10 & -2 \\ -2 & -5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

8. Вычислить $C=A-\lambda E$, при $\lambda=5$.
9. Даны матрицы A и B. Найти матрицу $C=A*B$, если возможно.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Практическое занятие № 2. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы.

Цели занятия: Научиться вычислять определители, используя определение и теорему о разложении. Научиться находить обратную матрицу.

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами вычисления определителей и нахождения обратной матрицы**

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8-15=-23$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0+6=6$

3. Вычислить определитель матрицы D, если $D= -A+2B$ и

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8-3\cdot(-1)-4\cdot 2=3$.

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1+2\cdot 4=9$

3. **Пример.** Дан определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Найти A_{13}, A_{21}, A_{32}.

$$A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=-2-12=-14;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}=2.$$

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, раскладывая его по элементам 2-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-1+9)-4(6-2)=-8-16=-\underline{24}.$$

2. Найти матрицу, обратную данной $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

$|A| = 2$. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A.

$A_{11} = 2,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = 1.$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{|A|}A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\ A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

1. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда $a_{12}^{-1} = \frac{1}{4}A_{21} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0.$

$$a_{31}^{-1} = \frac{1}{4}A_{13} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$A_{11} = 3,\ A_{12} = -6,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = -1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = -4.$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},\ (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

2. **Выполнить следующие упражнения**

Вычислить определитель матрицы.

1. $A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 9 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$

2. $A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & [illegible] \\ 6 & 2 & -5 & [illegible] \\ 4 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & [illegible] & 7 & [illegible] \end{vmatrix}$

3. $A = \begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 4 \\ -1 & -9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \end{vmatrix}$

Найти матрицу обратную матрице А.

$a) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix}, \quad b) A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad c) A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие № 3. Решение систем линейных уравнений с использованием правила Крамера.

Цели занятия: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью правила Крамера.

Ход занятия:

1.Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью правила Крамера.

Пример. Найти решение системы уравнений:

[redacted]

Вычислим главный определитель системы

D = [redacted] = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой первого столбца на столбец свободных членов

$D_1 =$ [redacted] $= (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой второго столбца на столбец свободных членов

$D_2 =$ [redacted] $= 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой третьего столбца на столбец свободных членов

$D_3 =$ [redacted] $= 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$

Найдем неизвестные, используя формулы Крамера

$x_1 = D_1/D = 1;$

$x_2 = D_2/D = 2;$

$x_3 = D_3/D = 3.$

2. Выполнить следующие упражнения

Решить системы уравнений спомощью правила Крамера

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Практическое занятие № 4 Решение систем линейных уравнений с использованием метода Гаусса

Цели занятия: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью метода Гаусса**

Пример. . Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6 \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8 \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4 \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу B данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$B\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1), затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $(-1/2)$, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $1/9$, четвертую – на $1/18$, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_4 = 2 \end{cases}.$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4, вычислим x_3, $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2, $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1, $x_1 = 1$.

Ответ : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

[redacted]

Составим расширенную матрицу системы.

A* = [redacted]

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

[redacted], откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

Пример. Решить систему методом Гаусса.

[redacted]

Составим расширенную матрицу системы.

[redacted]

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

[redacted], откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

2. Выполнить следующие упражнения

Решить системы уравнений с помощью метода Гаусса

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Практическое занятие № 5. Контрольная работа № 1. Матричные операции. Решение систем линейных уравнений

Цели занятия: Проверить умение выполнять матричные действия и умение решать системы линейных алгебраических уравнений

Вариант № 1

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Вариант № 2

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x+3y-4z=3 \\ 3x-4y+2z=-5 \\ 2x+7y-5z=13 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}^2$$

Вариант № 3

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & -7 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x-7y+5z=9 \\ x+5y-5z=-2 \\ 4x-2y+7z=24 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 4 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Вариант № 4

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Тест по разделу «Элементы линейной алгебры»

1. Матрицей второго порядка называется:
   a. выражение с двумя элементами;
   b. таблица из четырех элементов;
   c. четыре числа;
2. В квадратной матрице…
   a. все элементы одинаковы;
   b. четное число элементов;
   c. число строк равно числу столбцов;
3. Главная диагональ в матрице:
   a. слева сверху – вправо вниз;
   b. слева снизу – вправо вверх;
   c. не должна содержать нулей;
4. Нулевая матрица, это такая матрица, в которой..
   a. все элементы нулевые;
   b. на главной диагонали – нули;
   c. есть строка (столбец) из нулей;
5. Элемент с одинаковыми индексами это-
   a. элемент главной диагонали;
   b. нечетный элемент матрицы;
   c. нулевой элемент матрицы;
6. Результатом сложения двух матриц есть
   a. матрица того же порядка и размера;
   b. матрица большего размера
   c. диагональная матрица;
7. Определитель равен

1.
   a. -1
   b. 1
   c. 13

8. Какую матрицу можно возвести в квадрат?
   a. Прямоугольную;
   b. квадратную;
   c. абсолютно любую;
9. Какой метод используется при решении системы линейных уравнений с числом переменных не равных числу уравнений
   a. Формулы Крамера
   b. Метод Гаусса
   c. Метод обратной матрицы
10. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен
    a. 1
    b. 0
    c. 2

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 2.1. Векторы. Операции над векторами.

Практическое занятие № 6. Выполнение действий над векторами

Цели занятия: Научиться выполнять действия над векторами

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над векторами**

Пример. Найти (5[redacted] + 3[redacted])(2[redacted] - [redacted]), если [redacted]

10[redacted]×[redacted]- 5[redacted]×[redacted]+ 6[redacted]×[redacted]- 3[redacted]×[redacted] = 10[redacted],

т.к. [redacted].

Пример. Найти угол между векторами [redacted]и [redacted], если [redacted]

[redacted].

Т.е. [redacted]= (1, 2, 3), [redacted]= (6, 4, -2)

[redacted]×[redacted]= 6 + 8 – 6 = 8:

[redacted].

cosj = [redacted]

Пример. Найти скалярное произведение (3[redacted] - 2[redacted])×(5[redacted] - 6[redacted]), если [redacted]

15[redacted]×[redacted]- 18[redacted]×[redacted]- 10[redacted]×[redacted]+ 12[redacted]×[redacted] = 15[redacted]

+ 12×36 = 240 – 336 + 432 = 672 – 336 = 336.

Пример. Найти угол между векторами [redacted]и [redacted], если [redacted].

Т.е. [redacted]= (3, 4, 5), [redacted]= (4, 5, -3)

[redacted]×[redacted]= 12 + 20 - 15 =17 :

[redacted].

cosj = [redacted]

Пример. При каком m векторы [redacted] и [redacted] перпендикулярны.

[redacted]= (m, 1, 0); [redacted]= (3, -3, -4)

[redacted].

Пример. Найти скалярное произведение векторов [redacted] и [redacted], если [redacted]

([redacted])([redacted]) = [redacted]

[redacted] = 10 +

+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547.

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить модуль вектора ***a*** — {6; 3; — 2}.
2. Даны две координаты вектора *X=4, У*= —12. Определить его третью координату *Z* при условии, что $|\bar{a}|=13$.
3. Даны точки *A*(3; —1; 2)и *B*(— 1; 2; 1).Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.
4. Определить точку *N, с* которой совпадает конец вектора ***a*** = {3; —1; 4}, если его начало совпадает с точкой *M (I; 2; —*3).
5. Определить начало вектора *a* = {2; —3; —1}, если его конец совпадает с точкой (1; —1; 2).
6. Дан модуль вектора $|\bar{a}|=2$ и углы α = 45°, β = 60°, γ=120°. Вычислить проекции вектора *a* на координатные оси.
7. Вычислить направляющие косинусы вектора ***a*** ={12; —15; —16}.
8. Вычислить направляющие косинусы вектора $a=\left\{\frac{3}{13};\frac{4}{13};\frac{12}{13}\right\}$
9.
10. . Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) α = 45°, β = 60°, γ = 120°; 2) α = 45°, β =135°, γ = 60°; 3) α = 90°, β =150°; γ = 60°?
11. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) α = 30°, β = 45°; 2) β = 60°, γ = 60°; 3) α = 150°, γ = 30°?
12. Вектор составляет с осями *Ox* и *Oz* углы α =120° и γ = 45°. Какой угол он составляет с осью *Oy?*
13. Вектор *a* составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы α = 60°, β = 120°. Вычислить его координаты при условии, что $|\bar{a}|=2$.
14. Определить координаты точки *M,* если её радиус—вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.
15. По данным векторам ***a*** и ***b*** построить каждый из следующих векторов: 1) ***a*** + ***b;*** 2) ***a*** — ***b;*** 3) ***b*** — ***a;*** 4) —***a*** — ***b.***
16. Даны: |***a***| = 13, |***b***| = 19 и |***a*** + ***b***| = 24. Вычислить |***a*** — ***b***|.
17. Даны: |***a***| = 11, |***b***| = 23 и |***a*** + ***b***| = 30. Определить |***a*** + ***b***|.

Тема 2.2. Прямые на плоскости. Кривые второго порядка

Практическое занятие № 7 Составление уравнений прямых, их построение

Цели занятия: Научиться составлять уравнения прямой любого вида

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений прямых любого вида**

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A(1, 2) перпендикулярно вектору [redacted](3, -1).

Составим при A = 3 и B = -1 уравнение прямой: 3x – y + C = 0. Для нахождения коэффициента C подставим в полученное выражение координаты заданной точки A.

Получаем: 3 – 2 + C = 0, следовательно C = -1.

Итого: искомое уравнение: $3x - y - 1 = 0$.

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(1, 2)$ и $B(3, 4)$.

Применяя записанную выше формулу, получаем:

[redacted]

Пример. Найти уравнение прямой с направляющим вектором [redacted](1, -1) и проходящей через точку $A(1, 2)$.

Уравнение искомой прямой будем искать в виде: $Ax + By + C = 0$. В соответствии с определением, коэффициенты должны удовлетворять условиям:

$$1 \times A + (-1) \times B = 0, \text{ т.е. } A = B.$$

Тогда уравнение прямой имеет вид: $Ax + Ay + C = 0$, или $x + y + C/A = 0$.

при $x = 1$, $y = 2$ получаем $C/A = -3$, т.е. искомое уравнение:

$$x + y - 3 = 0$$

Пример. Задано общее уравнение прямой $x - y + 1 = 0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$C = 1$, [redacted], $a = -1$, $b = 1$.

Пример. Дано общее уравнение прямой $12x - 5y - 65 = 0$. Требуется написать различные типы уравнений этой прямой.

уравнение этой прямой в отрезках: [redacted]

уравнение этой прямой с угловым коэффициентом: (делим на 5)

[redacted]

нормальное уравнение прямой:

[redacted]; cosj = 12/13; sinj = -5/13; p = 5.

Следует отметить, что не каждую прямую можно представить уравнением в отрезках, например, прямые, параллельные осям или проходящие через начало координат.

Пример. Прямая отсекает на координатных осях равные положительные отрезки. Составить уравнение прямой, если площадь треугольника, образованного этими отрезками равна 8 см^2.

Уравнение прямой имеет вид: [redacted], a = b = 1; ab/2 = 8; a = 4; -4.

a = -4 не подходит по условию задачи.

Итого: [redacted] или $x + y - 4 = 0$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: [redacted], где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

[redacted]

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$k_1 = -3$; $k_2 = 2$ tgj = [redacted]; j = p/4.

Пример. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

Находим: $k_1 = 3/5$, $k_2 = -5/3$, $k_1k_2 = -1$, следовательно, прямые перпендикулярны.

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: [redacted]; $4x = 6y - 6$;

$2x - 3y + 3 = 0$; [redacted]

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k =$ [redacted]. Тогда $y =$ [redacted]. Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению: [redacted]откуда $b = 17$. Итого: [redacted].

Ответ: $3x + 2y - 34 = 0$.

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый ею на оси Oy:

1) $k = 4$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = Q$,, $b = — 2$;

1. $k = —\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k = —2$, $b = — 5$; 6) $k = —\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

2. Определить угловой коэффициент k и отрезок b, отсекаемый на оси Oy, для каждой из прямых:

1) $5x—y + 3 = 0$; 2) $2x+3y — 6 = 0$;

3) $5x + 3y+2 = 0$; 4) $3x+2y; = 0$; 5) $y — 3 = 0$.

3. Дана прямая $5x+3y — 3 = 0$. Определить угловой коэффициент k прямой:

1.
    a. параллельной данной прямой;
    b. перпендикулярной к данной прямой.

4. Дана прямая $2x+3y+4 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2; 1)$:

1.
    a. параллельно данной прямой;
    b. перпендикулярно к данной прямой.

5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$2x—3y+5 = 0$, $3x+2y — 7 = O$

и одна из его вершин $A(2; —3)$. Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

6. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$x — 2y = 0$, $x — 2y+15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей

$7x+y—15 = 0$. Найти вершины прямоугольника

Практическое занятие № 8 Составление кривых 2-го порядка, их построение

Цели занятия: Научиться составлять уравнения кривых второго порядка и строить графики

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений кривых второго порядка и построения их графиков**

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 - 8x + 5y - 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 - 4x + 2{,}5y - 2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y^2 + 2{,}5y + 25/16 - 25/16 - 2 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 - 25/16 - 6 = 0$$

$$(x - 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим $O(2; -5/4)$; $R = 11/4$.

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через левый фокус и нижнюю вершину эллипса, заданного уравнением: [redacted]

1. Координаты нижней вершины: $x = 0$; $y^2 = 16$; $y = -4$.
2. Координаты левого фокуса: $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$; $F_2(-3; 0)$.
3. Уравнение прямой, проходящей через две точки:

[redacted]

Пример. Составить уравнение эллипса, если его фокусы $F_1(0; 0)$, $F_2(1; 1)$, большая ось равна 2.

Уравнение эллипса имеет вид: [redacted]. Расстояние между фокусами:

$2c =$ [redacted], таким образом, $a^2 - b^2 = c^2 = ½$

по условию $2a = 2$, следовательно $a = 1$, $b =$ [redacted]

Итого: [redacted].

Пример. Найти уравнение гиперболы, вершины и фокусы которой находятся в соответствующих вершинах и фокусах эллипса [redacted].

Для эллипса: $c^2 = a^2 - b^2$.

Для гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$.

Уравнение гиперболы: [redacted].

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Составить уравнение гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2, а фокусы совпадают с фокусами эллипса с уравнением [redacted]

2. На параболе $y^2 = 8x$ найти точку, расстояние которой от директрисы равно 4.

Практическое занятие № 9 Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Цели занятия: Научиться приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду**

Пример.Пусть дано уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

определяющее кривую второго порядка.

Рассмотрим произведение A*C:

1. Если A*C> 0, то кривая определяет эллипс, может быть окружность;
2. Если A*C< 0, то кривая определяет гиперболу;
3. Если A*C= 0, то кривая определяет параболу.

Приводим данное уравнение к каноническому виду путем выделения полного квадрата.

Исследуйте уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ и определите вид полученной кривой

Сначала определяем тип кривой, находим произведение A*C

A*C=4*9=36>0, следовательно, искомая кривая – эллипс.

Выделяем полный квадрат:

$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

$4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$

$(2x)^2-2*2x*2+4-4+(3y)^2-2*3y*6+36-36+4=0$

$(2x-2)^2+(3y-6)^2-36=0$

$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$

Разделим обе части на 36:

$(x-1)^2/9+(y-2)^2/4=1$

Получилось каноническое уравнение эллипса.

2. **Выполнить следующие упражнения**

Определить тип кривой второго порядка и построить ее график.

1. $4x^2-y^2-4=0$
2. $x^2+y^2+6x+2y+1=0$
3. $4x^2+36y^2-16x+72y-92=0$
4. $25x^2-100=4y^2$
5. $x^2+y^2-10y=0$
6. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
7. $x^2+2x-20y-79=0$
8. $x^2-4y^2+8y-8=0$
9. $x^2+y^2+4x-2y-4=0$
10. $x^2+4y^2-16=0$
11. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$
12. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$

Упражнения для самостоятельной работы

1. $x^2-y^2-16=0$
2. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$
3. $9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
4. $4x^2+9y^2-18y-27=0$
5. $9x^2-4y^2+8y-40=0$
6. $x^2+y^2+2x-2y-2=0$
7. $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$

8. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$
9. $x^2-y^2-25=0$
10. $4x^2-y-4=0$
11. $x^2-y^2-4=0$
12. $25x^2-100+4y^2=0$
13. $x^2+y^2+10y=0$
14. $4x^2-y^2-64=0$
15. $x^2+4y^2+2x-3=0$
16. $-2x^2-16x+2y-10=0$

Тест по разделу «Элементы аналитической геометрии»

1. Даны уравнения линий y^2=x, y=x^2+1, x-y=0. Найти среди них уравнение прямой

1.
   a. y^2=x
   b. y=x^2+1
   c. x-y=0

2. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, радиусом равным 2

1.
   a. x^2 + y^2 = 4
   b. x^2 + y^2 = 2
   c. (x – 2)^2 + (y – 2)^2 = 4

3. К кривым второго порядка не относится

1.
   a. гипербола
   b. прямая
   c. эллипс

4. Какого типа уравнения прямой не существует

1.
   a. каноническое уравнение прямой
   b. уравнение прямой с угловым коэффициентом
   c. естественное уравнение прямой

5. Найдите уравнение эллипса

   a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

   b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

6. Найдите уравнение гиперболы

   a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

7. Найдите уравнение окружности

a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

8. Даны векторы $\bar{a} = (2;-3), \bar{b} = (-2;-1)$, тогда координаты вектора $3\bar{b} - 4\bar{a}$ равны

a. (–14; –15)

b. (–14; 9)

c. (–14; 5)

9. Найдите каноническое уравнение прямой

a. $x + 3y - 3 = 0$

b. $\frac{x-2}{-6} = \frac{y+11}{5}$

c. $y = x - 10$

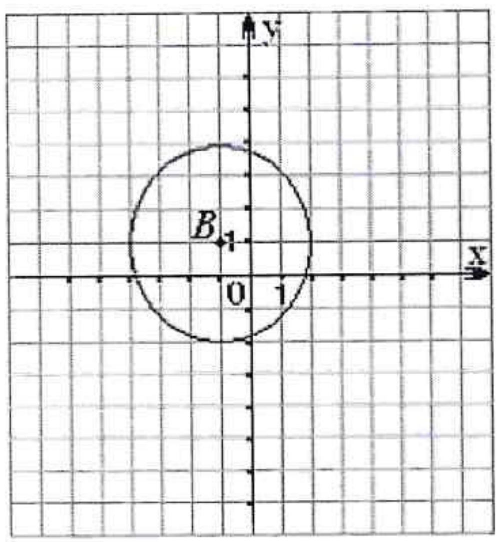
10. Найдите уравнение прямой с угловым коэффициентом

a. $x + 3y - 3 = 0$

b. $\frac{x-2}{-6} = \frac{y+11}{5}$

c. $y = x - 10$

11. Уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид



a. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 6$

b. $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 9$

c. $(x+1)^2 - (y-1)^2 = 3$

Раздел 3. Основы математического анализа

Тема 3.1 Теория пределов. Непрерывность функций

Практическое занятие № 10 Вычисление пределов числовых последовательностей. Вычисление пределов функций. Раскрытие неопределенностей

Цели занятия: Научиться вычислять пределы числовых последовательностей и пределы функций. Изучить правила раскрытия неопределенностей.

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами вычисления пределов числовых последовательностей и функций

Пример. Доказать, что предел последовательности lim [redacted].

Пусть при n > N верно [redacted], т.е. [redacted]. Это верно при [redacted], таким образом, если за N взять целую часть от [redacted], то утверждение, приведенное выше, выполняется.

Пример. Показать, что при n®¥ последовательность 3, [redacted] имеет пределом число 2.

Итого: $\{x_n\} = 2 + 1/n$; $1/n = x_n - 2$

Очевидно, что существует такое число n, что [redacted], т.е. lim $\{x_n\} = 2$.

Пример. $\{x_n\} = 1/n$ – убывающая и ограниченная

$\{x_n\} = n$ – возрастающая и неограниченная.

Пример. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$= [redacted] монотонная возрастающая.

Найдем член последовательности $\{x_{n+1}\}$= [redacted]

Найдем знак разности: $\{x_n\}-\{x_{n+1}\}=$ [redacted], т.к. nÎN, то знаменатель положительный при любом n.

Таким образом, $x_{n+1} > x_n$. Последовательность возрастающая, что и следовало доказать.

Пример. Выяснить является возрастающей или убывающей последовательность

$\{x_n\} =$ [redacted].

Найдем [redacted]. Найдем разность [redacted], т.к. nÎN, то $1 - 4n < 0$, т.е. $x_{n+1} < x_n$. Последовательность монотонно убывает.

Пример.. Найти $\lim \frac{5x^2+1}{7x^3+2x+3}$.

Решение.

Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и [redacted] являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim(5x^2+1)=\infty, \lim(7x^3+2x+3)=\infty$. Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия этой неопределенности выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim \frac{5x^2+1}{7x^3+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim \frac{x^3\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(7+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}=\lim \frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^3}}{7+\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{0}{7}=0$$

Пример. Найти $\lim \frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim \frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim \frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9$$

Пример.. Найти $\lim \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Решение.

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim \frac{(\sqrt{x^2+1}-1)(\sqrt{x^2+1}+1)}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

Пример. Найти предел [redacted].

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

x2 – 6x + 8 = 0; x2 – 8x + 12 = 0;

D = 36 – 32 = 4; D = 64 – 48 = 16;

$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$

$x_2 = (6 - 2)/2 = 2 ; x_2 = (8 - 4)/2 = 2;$

Тогда [redacted]

Пример. Найти предел.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, т.к.

$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ x - 1

$x^3 - x^2$ $x^2 - 5x + 6$

$- 5x^2 + 11x$

$- 5x^2 + 5x$

6x - 6

6x - 6 0

2. Выполнить следующие упражнения

1. Вычислить предел последовательности.