МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г.ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге**

Методические указания по выполнению заданий на практических занятиях по дисциплине Математика по специальности 490201 Физическая культура

г. Таганрог
2023

Введение

Уважаемый студент, Вы приступаете к изучению методических указаний для практических занятий по дисциплине Математика.

Данный курс дает возможность усвоить основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории комплексных чисел.

Изучение данного курса будет способствовать приобретению навыков решения задач высшей математики.

Данный курс составлен в соответствии с требованиями ООП по дисциплине математического и общего естественнонаучного учебного цикла математика.

Цель и задачи освоения дисциплины Математика

В результате изучения данной дисциплины Вы должны

уметь:

- выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
- применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- решать дифференциальные уравнения.

знать:

- основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;
- основы дифференциального и интегрального исчисления.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины Математика

Процесс изучения дисциплины Математика направлен на формирование следующих компетенций в соответствии с программой ФГОС СПО:

ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.

ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.

ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.

ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.

ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.

ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.

ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), результат выполнения заданий.

ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.

ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

ПК 1.2. Разрабатывать схемы цифровых устройств на основе интегральных схем разной степени интеграции.

ПК 1.4. Проводить измерения параметров проектируемых устройств и определять показатели надежности.

ПК 2.3. Применять методики тестирования разрабатываемых приложений.

Алгоритм выполнения практических занятий

При выполнении практических занятий следует придерживаться следующего алгоритма действий:

1. Ознакомиться с решением типовой задачи;
2. Выполнить предложенные задачи по образцу;
3. Выполненные работы необходимо предоставить преподавателю в письменном виде.

Раздел 1. Элементы линейной алгебры

Тема 1.1 Матрицы и определители

Практическое занятие № 1. Действия над матрицами.

Цели занятия: Научиться выполнять действия над матрицами.

Ход занятия

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над матрицами**

Пример. Найти матрицу транспонированную данной.

1. $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 3\\ 7 & -2 & 1\end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 0 & -2\\ 3 & 1\end{pmatrix}$.
2. $B=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 3\end{pmatrix}, \qquad B^T=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\\ 3 & 5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & 0\\ 1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 6 & 4\\ 4 & 10\end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Примеры.

1. $-2\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ -1 & 2 & 4\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -6 & 0\\ 2 & -4 & -8\\ -4 & 2 & -6\end{pmatrix}$.
2. Найти 2A-B, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

$$2A-B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 4 & 0 & -4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & -2 & -3\\ -1 & 4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 5\\ 5 & -4 & -5\end{pmatrix}.$$

3. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 3\end{pmatrix}$. Найти $C=-3A+4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

1. Пусть $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ 3 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \quad C=AB.$

Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

$$c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}$.
4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.
5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

Найти AB и BA.

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$$

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Найти AB и BA.

$AB = \begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$, $B \cdot A$ – не имеет смысла.

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить матрицу $C = 6A - B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2. Даны матрицы A и B. Найти $C = 3A + 5B$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\-5 & 10 & 6\\1 & -3 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3\\1 & 1 & -2\end{pmatrix}.$$

3. Даны матрицы A и B. Найти $C=6A-2B$, если

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2 & 3 & 4\\-2 & -3 & 0 & 4 & 8\\0 & 0 & 1 & -1 & -1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -4 & 8 & 10 & -1\\-2 & -6 & 2 & 5 & -2\\1 & -1 & 2 & -3 & 5\end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы A и B. Найти $C=6(A+7B)$, если

$$A=\begin{pmatrix}0 & -2 & 3\\5 & -1 & -1\\6 & 7 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 2\\-5 & -13 & 20\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

5. Даны матрицы A и B. Найти $C=-10(3A-B)$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -20\\2 & 2 & 2\\1 & 73 & -5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 2\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

6. Найти матрицу $C=A+\lambda E$, где $\lambda-$ некоторое число, $E-$ единичная матрица, $A-$ заданная матрица.

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 3 & -2\\2 & 3 & 5 & -4\\1 & 3 & 10 & -2\\-2 & -5 & 5 & 10\end{pmatrix}$$

8. Вычислить $C=A-\lambda E$, при $\lambda=5$.
9. Даны матрицы A и B. Найти матрицу $C=A*B$, если возможно.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\3 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\-1 & -3 & 0\\1 & 4 & 1\end{pmatrix}$$

Практическое занятие № 2. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы.

Цели занятия: Научиться вычислять определители, используя определение и теорему о разложении. Научиться находить обратную матрицу.

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами вычисления определителей и нахождения обратной матрицы**

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 15 = -23$
2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 6 = 6$.
3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D*= *-A+2B* и

$$A = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix}, \quad |D| = 0.$$

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3$.
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9$
3. **Пример.** Дан определитель $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$. Найти A_{13}, A_{21}, A_{32}.

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 12 = -14; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$, раскладывая его по элементам 2-го столбца.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^3\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^5\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= -(-1+9) - 4(6-2) = -8 - 16 = -\underline{24}.$$

2. Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Сделать проверку.

|*A*| = 2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

$A_{11} = 2,\ A_{12} = 0,\ A_{21} = 1,\ A_{22} = 1.$

$$A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \frac{1}{|A|}A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix},\quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A')^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично $A \cdot A^{-1} = E$.

1. Найти элементы a_{12}^{-1} и a_{31}^{-1} матрицы A^{-1} обратной данной

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Вычислим $|A| = 4$. Тогда $a_{12}^{-1} = \frac{1}{4}A_{21} = -\frac{1}{4}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0$.

$$a_{31}^{-1} = \frac{1}{4}A_{13} = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}.$$

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Найдем обратную матрицу.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 - 12 = -9.$$

$$A_{11} = 3,\ A_{12} = -6,\ A_{13} = 3,\ A_{21} = -4,\ A_{22} = 2,\ A_{23} = -1,\ A_{31} = 2,\ A_{32} = -1,\ A_{33} = -4.$$

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix},\quad (A')^T = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}(A')^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

2. **Выполнить следующие упражнения**

Вычислить определитель матрицы.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 9 & 7 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 7 \\ 6 & 2 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 4 \\ -1 & -9 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 6 \end{pmatrix}$

Найти матрицу обратную матрице А.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & 1 & 3 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix},\quad b)\ A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix},\quad c)\ A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений

Практическое занятие № 3. Решение систем линейных уравнений с использованием правила Крамера.

Цели занятия: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью правила Крамера.

Ход занятия:

1.Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью правила Крамера.

<u>Пример.</u> Найти решение системы уравнений:

[redacted]

Вычислим главный определитель системы

D = [redacted] = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой первого столбца на столбец свободных членов

D_1 = [redacted] = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой второго столбца на столбец свободных членов

D_2 = [redacted] = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой третьего столбца на столбец свободных членов

D_3 = [redacted] = 5(32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

Найдем неизвестные, используя формулы Крамера

$x_1 = D_1/D = 1$;

$x_2 = D_2/D = 2$;

$x_3 = D_3/D = 3$.

2. Выполнить следующие упражнения

Решить системы уравнений спомощью правила Крамера

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Практическое занятие № 4 Решение систем линейных уравнений с использованием метода Гаусса

Цели занятия: Научиться решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью метода Гаусса**

Пример. **.** Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}.$$

Решение. Выпишем расширенную матрицу B данной системы и приведем ее к ступенчатому виду

$$B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & -3 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

$$B \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на (-1), затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на $(-1/2)$, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 2 & 5 & -4 & 7 \\ 0 & 7 & 4 & -5 & 20 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & 27 \\ 0 & 0 & 18 & -54 & 90 \end{array}\right).$$

Третью строку полученной матрицы умножим на $1/9$, четвертую – на $1/18$, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ -x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 10 \\ x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_4 = 2 \end{cases}.$$

Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, $x_4 = -2$; подставим в третье уравнение найденное x_4, вычислим x_3, $x_3 = -1$; затем из второго уравнения находим x_2, $x_2 = 2$; из первого уравнения получим x_1, $x_1 = 1$.

Ответ : $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, x_4 = -2$.

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

[redacted]

Составим расширенную матрицу системы.

A* = [redacted]

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

[redacted], откуда получаем: $x_3 = 2$; $x_2 = 5$; $x_1 = 1$.

<u>Пример.</u> Решить систему методом Гаусса.

[redacted]

Составим расширенную матрицу системы.

[redacted]

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

[redacted], откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

2. Выполнить следующие упражнения

Решить системы уравнений с помощью метода Гаусса

1. $\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + 3y - z = 7 \\ 3x - y + 4z = 12 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9 \\ x + 5y - 5z = -2 \\ 4x - 2y + 7z = 24 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$

Практическое занятие № 5. Контрольная работа № 1. Матричные операции. Решение систем линейных уравнений

Цели занятия: Проверить умение выполнять матричные действия и умение решать системы линейных алгебраических уравнений

Вариант № 1

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + 4z = 9 \\ y + z = 2 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}^2$$

Вариант № 2

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 3 \\ 3x - 4y + 2z = -5 \\ 2x + 7y - 5z = 13 \end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 3 & -5 & 1\end{pmatrix}^2 - 2\begin{pmatrix}2 & 1 & 7\\ 3 & -1 & 5\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\\ 8 & -1 & 2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 3 & 5 & 1\\ 8 & -1 & 2\end{pmatrix}^2$$

Вариант № 3

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}2 & -1 & 3\\ 7 & -7 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - 7y + 5z = 9\\ x + 5y - 5z = -2\\ 4x - 2y + 7z = 24\end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix}3 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -3\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 5\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\ -2\\ 3\end{pmatrix}$$

Вариант № 4

Задача 1. Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix}3 & -1 & 2\\ 2 & 2 & 3\\ 3 & -2 & 1\end{vmatrix}$$

Задача 2. Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4\\ x + 3y - z = 7\\ 3x - y + 4z = 12\end{cases}$$

Задача 3. Выполнить действия:

$$\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&2&5\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&2&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\-4&5&0\\1&3&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&2&1\\-4&5&0\\1&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\1&1&3\\2&2&5\end{pmatrix}$$

Тест по разделу «Элементы линейной алгебры»

1. Матрицей второго порядка называется:
   a. выражение с двумя элементами;
   b. таблица из четырех элементов;
   c. четыре числа;
2. В квадратной матрице…
   a. все элементы одинаковы;
   b. четное число элементов;
   c. число строк равно числу столбцов;
3. Главная диагональ в матрице:
   a. слева сверху – вправо вниз;
   b. слева снизу – вправо вверх;
   c. не должна содержать нулей;
4. Нулевая матрица, это такая матрица, в которой..
   a. все элементы нулевые;
   b. на главной диагонали – нули;
   c. есть строка (столбец) из нулей;
5. Элемент с одинаковыми индексами это-
   a. элемент главной диагонали;
   b. нечетный элемент матрицы;
   c. нулевой элемент матрицы;
6. Результатом сложения двух матриц есть
   a. матрица того же порядка и размера;
   b. матрица большего размера
   c. диагональная матрица;
7. Определитель равен

1.
   a. -1
   b. 1
   c. 13

8. Какую матрицу можно возвести в квадрат?
   a. Прямоугольную;
   b. квадратную;
   c. абсолютно любую;
9. Какой метод используется при решении системы линейных уравнений с числом переменных не равных числу уравнений
   a. Формулы Крамера
   b. Метод Гаусса
   c. Метод обратной матрицы

10. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ равен

   a. 1
   b. 0
   c. 2

Раздел 2. Элементы аналитической геометрии

Тема 2.1. Векторы. Операции над векторами.

Практическое занятие № 6. Выполнение действий над векторами

Цели занятия: Научиться выполнять действия над векторами

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над векторами**
2. ***ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ.***
3. 1.Векторный ***базис*** на плоскости $\{0;\vec{i};\vec{g}\}$.
4. ***Разложение*** вектора по базису $\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{g}$.
5. ***Координаты*** вектора $\vec{a}=\{x_1;y_1\}$.
6.
7. 2.Векторный ***базис*** в пространстве $\{0;\vec{i};\vec{g};\vec{k}\}$.
8. ***Разложение*** вектора по базису $\vec{a}=x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{g}+z_1\cdot\vec{k}$.
9. ***Координаты*** вектора $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$.
10.
11. 3.Для нахождения ***координат*** вектора надо из координат его конца вычесть одноименные координаты начала вектора.
12.
13. 4.***Длина вектора*** равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.
14.
15. 5.***Скалярным произведением*** векторов ***называется*** произведение длин векторов на косинус угла между ними.
16. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

17.
18. 6. ***Скалярное произведение*** векторов ***равно*** сумме произведений одноименных координат вектора.
19.
20. 7. Если векторы заданы своими координатами $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\};\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$,то ***действия*** над ними выполняются по правилам:
21. $\vec{a}\pm\vec{b}=\{x_1\pm x_2;y_1\pm y_2;z_1\pm z_2\};k\cdot\vec{a}=\{k\cdot x_1;k\cdot y_1;k\cdot z_1\}$.
22.
23. 8. ***Деление отрезка пополам.*** Точки A(x_1;y_1) и B(x_2;y_2) являются началом и концом отрезка; M(x.;y) делит отрезок AB пополам. Координаты точки M находят по формулам
24. $x=\dfrac{x_1+x_2}{2};y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.
25.
26. 9. ***Деление отрезка в данном отношении.*** Если отрезок AB делится точкой M в отношении m:n= λ , то координаты точки M находят по формулам
27. $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.
28.
29.
30.
31.
32.

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить модуль вектора ***a*** — {6; 3; — 2}.
2. Даны две координаты вектора *X=4, У=* —12. Определить его третью координату *Z* при условии, что $|a|=13$.
3. Даны точки *A*(3; —1; 2)и *B*(— 1; 2; 1).Найти координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$.
4. Определить точку *N, с* которой совпадает конец вектора ***a*** = {3; —1; 4}, если его начало совпадает с точкой *M (I; 2;* —3).
5. Определить начало вектора *a* = {2; —3; —1}, если его конец совпадает с точкой (1; —1; 2).
6. Дан модуль вектора $|a|=2$ и углы α = 45°, β = 60°, γ =120°. Вычислить проекции вектора *a* на координатные оси.
7. Вычислить направляющие косинусы вектора ***a*** ={12; —15; —16}.
8. Вычислить направляющие косинусы вектора

9. $\alpha = \left\{\frac{3}{13}; \frac{4}{13}; \frac{12}{13}\right\}$
10. **.** Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 45°$, $\beta = 60°$, $\gamma = 120°$; 2) $\alpha = 45°$, $\beta = 135°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 90°$, $\beta = 150°$; $\gamma = 60°$?
11. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$; 2) $\beta = 60°$, $\gamma = 60°$; 3) $\alpha = 150°$, $\gamma = 30°$?
12. Вектор составляет с осями *Ox* и *Oz* углы $\alpha = 120°$ и $\gamma = 45°$. Какой угол он составляет с осью *Oy?*
13. Вектор *a* составляет с координатными осями *Ox* и *Oy* углы $\alpha = 60°$, $\beta = 120°$. Вычислить его координаты при условии, что $|a| = 2$.
14. Определить координаты точки *M,* если её радиус—вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.
15. По данным векторам ***a*** и ***b*** построить каждый из следующих векторов: 1) ***a*** + ***b****;* 2) ***a*** — ***b****;* 3) ***b*** — ***a****;* 4) —***a*** — ***b***.
16. Даны: |***a***| = 13, |***b***| = 19 и |***a*** + ***b***| = 24. Вычислить |***a*** — ***b***|.
17. Даны: |***a***| = 11, |***b***| = 23 и |***a*** + ***b***| = 30. Определить |***a*** + ***b***|.

Тема 2.2. Прямые на плоскости. Кривые второго порядка

Практическое занятие № 7 Составление уравнений прямых, их построение

Цели занятия: Научиться составлять уравнения прямой любого вида

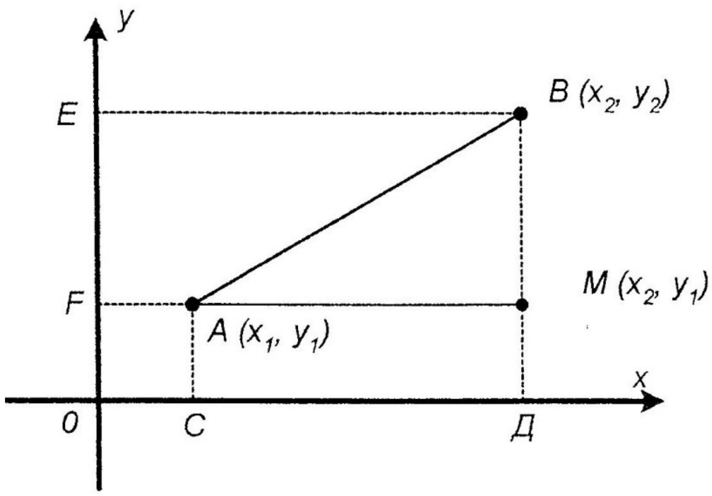
Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений прямых любого вида**

2.

3. В прямоугольной системе заданы две точки А (x_1; y_1) и В (x_2; y_2).

$$\Delta ABM \quad \angle M = 90°$$
$$|AB| = \sqrt{AM^2 + BM^2}$$
$$AM = СД = x_1 - y_2$$
$$BM = EF = y_2 - x_1$$
$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_2)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



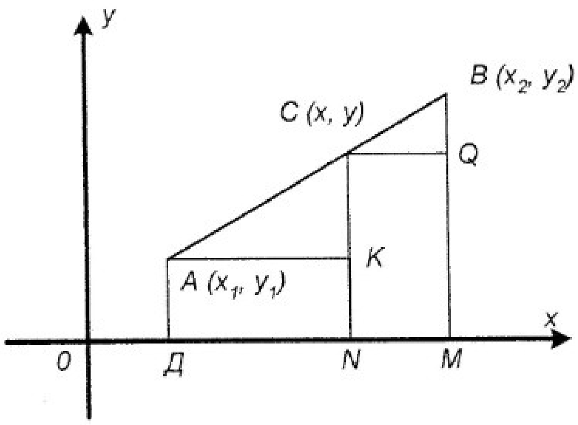
4. Длина вектора $A\vec{B} =$ { $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$}равно корню квадратному из суммы квадратов его координат.

5.

6. Деление отрезка в данном отношении.

7.

8. Дан отрезок AB с координатами A(x_1; y_1) и B (x_2; y_2) и на нем дана точка C с координатами (x;y), которая делит отрезок AB так, что AC:CB= λ . Определить координаты третей точки C $\Delta ACK \infty \Delta CB$ Q и следовательно, имеют место пропорции.



$$\frac{AK}{CQ}=\frac{AC}{CB}$$ (1)

и

$$\frac{CK}{BQ}=\frac{AC}{CB}$$ (1)

Определите отрезки AK, CQ, CK, BQ и внесите их значения в полученные пропорции (1) и (2), имеем:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda$$ и $$\frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda$$

и решив уравнение, получите значения x и y:

$$x=\frac{x_1-x_2\lambda}{x_2-x}$$

и

$$y=\frac{y_1-y_2\lambda}{1_2-\lambda}$$

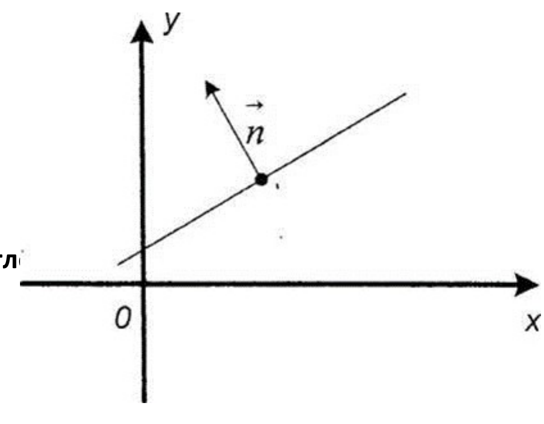
Если точка C делит отрезок AB пополам, то AC=CB, а $\lambda=1$ и

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}$$

9. Уравнение прямой на плоскости.

10.

11. Всякое уравнение вида $Ax + By + C= 0$, где $\{A,B,C\}\epsilon R$ и $A^2 + B^2 \neq O$, называется общим уравнением прямой на плоскости, оно задает единственную прямую на плоскости.
Всякий вектор, перпендикулярный прямой, называется ее нормальным вектором $\vec{n}=\{A;B\}$. Угол между прямы ми удобно находить как угол между их нормальными векторами.



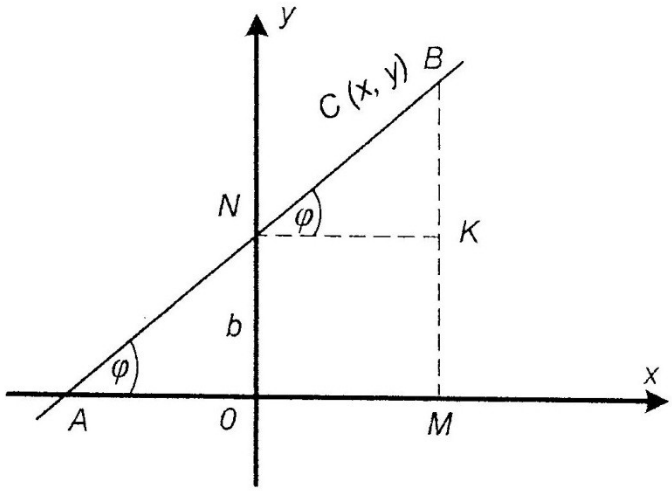
12.

13. Уравнение, прямой с угл

14.

Дана прямая АВ, которая с осью Ох образует угол (р и на оси Оу отсекает отрезок ON = b. Эти величины определяют положенью прямой АВ на плоскости в заданной системе координат и являются ее параметрами, так как они постоянны только для данной прямой АВ.

На прямой АВ дана произвольная точка С (х, у). Из прямоугольного треугольника NCK имеем:



$\frac{CK}{NK}=tg\,\phi$, а $CK=NK\cdot TG\,\phi$,NK=OM=x. Пологая $tg\,\phi=k$, получаем $y-b=k\cdot x$, $y=k\cdot x+b$ -мы получим уравнение прямой с угловым коэффициентом относительно текущих координат х и у.

15.

16. **Частные случаи уравнения прямой с угловым коэффициентом**.

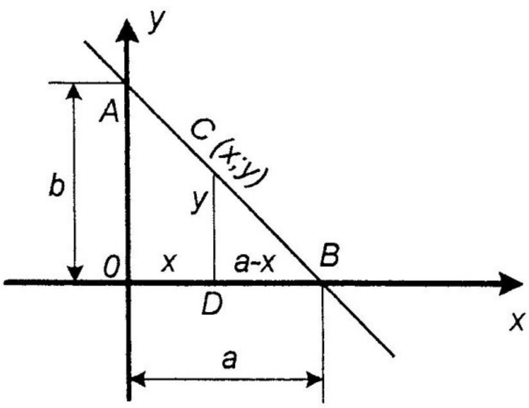
17.

18. Прямая *АВ* проходит через начало координат, *Ь=0* и уравнение $y=k\cdot x$ (сделать чертеж). Прямая *АВ* параллельна оси *Ох,* т.е. угол $\phi=0$ и $k=tg\,\phi=0$ и уравнение $y=k\cdot x+b$ принимает вид: *у = b* (сделать чертеж). Если прямая *у = b* совпадает с осью *Ох* , то *b = 0* и уравнение оси *Ох* имеет вид *у = 0.*
19. Прямая *АВ* параллельна оси *Оу.* Абсцисса точки пересечения ее с осью *Ох* равна *"а".* Уравнение такой прямой *х = а* (сделать чертеж). Если прямая
20. *х = а* совпадает с осью *Оу, а = 0* и уравнение оси *Оу х=0.*
21. Таким образом, всякая прямая выражается уравнение первой степени относительно текущих координат. Чтобы составить уравнение прямой, нужно определить ее параметры *k* и *b.*
22.

23. Уравнение прямой в отрезках.

24.

В прямоугольной системе координат задана прямая АВ, которая на осях координат отсекает отрезки OB = a и OA = b. На прямой AB дана точка C с текущими координатами (x;y) $\Delta OAB \infty \Delta DCB$ т.к. $\angle B$ - общий.



Из подобия треугольников следует, что $\frac{DC}{OA}=\frac{DB}{OD}$, $OA=b$; $DB=a-x$ и $OB=a$. Подставив значения, получим: $\frac{y}{b}=\frac{a-x}{a}$.

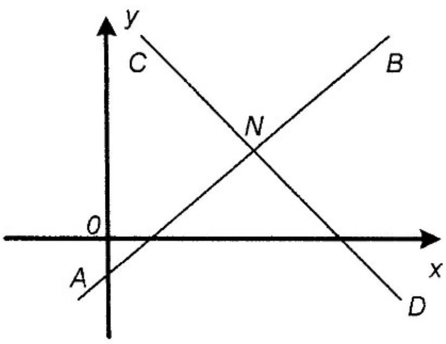
Поделив в прямой части почленно на «a» и перенося $\frac{x}{a}$ в левую часть равенства, получите искомое уравнение прямой в отрезках.

$$\frac{y}{b}=1-\frac{x}{a}, \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 .$$

25.Точка пересечения прямых.

26.

В системе координат даны прямые $y=k_1\cdot x+b_1$ (AB) и $y=k_2\cdot x+b_2$ (CD), которые пересекаются в точке N. Точка N лежит на прямой AB и CD и, следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям этих прямых , а следовательно, являются корнями системы:



$\{y=k_1\cdot x+b_1$¿¿¿¿

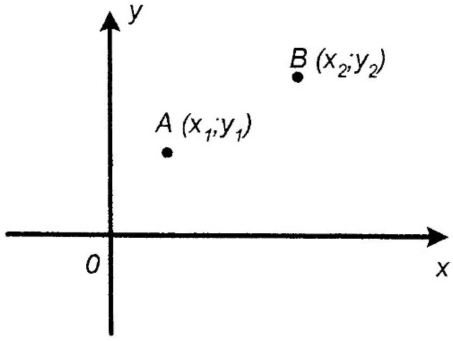
27.Вывод уравнений прямой, проходящей через две точки.

28.

В системе координат даны две точки *A (x;y)* и *B(x;y).* Уравнение прямой относительно точки *A* $(x_1;y_1)$ имеет вид: $y-y_1=k(x-x_1)$ (1).

Подставляя координаты второй точки *в* $(x_2;y_2)$, получим $y_2-y_1=k(x_2-x_1)$ (2)

Необходимо из равенства (2) найти



"к", подставить в равенство (1),
разделить
обе части на $y_2 - y_1$, и получить уравнение прямой, проходящей через эти точки.

29.

30. Можно рассмотреть следующим способом.

31.

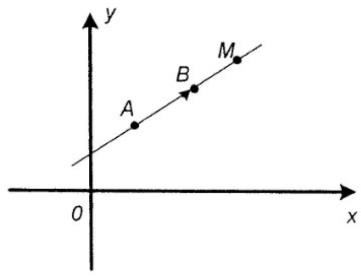
32. Уравнение прямой проходящей через две данные точки.

33.

Даны точки A $(x;y_1)$ и B$(x_2;y_2)$. Составим уравнение AB. Возьмем на прямой AB текущую точку $(x;y)$.

M

Рассмотрим векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AM}$.



$\vec{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$,

$\vec{AM} = \{x - x_1, y - y_1\}$.

Эти векторы коллинеарные, т.е. $\vec{AB} = k \cdot \vec{AM};$ k=€R.

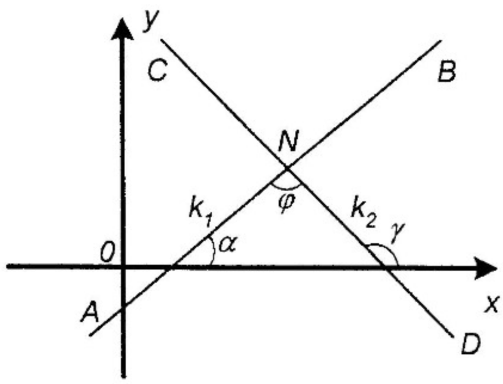
Следовательно, их координаты пропорциональны: $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.
Полученное уравнение есть уравнение прямой проходящей через точку A и B.

34.

35. Угол между прямыми

36.

В прямоугольной системе координат заданы две прямые $y = k_1 \cdot x + b_1$ (AB) $y = k_2 \cdot x + b_2$ (CD), которые пересекаются в точке N под углом $\phi \cdot k_1 = tg\,\alpha$, а $k_2 = tg\,\gamma$. Определить угол ϕ , зная угловые коэффициенты данных прямых AB и CD. За угол, образуемый с прямой AB прямой CD, применяется тот угол, на который надо повернуть прямую AB около точки N против часовой стрелки, чтобы она совпала с прямой CD. Угол $\gamma = \alpha + \phi$ как внешний угол, а отсюда $\phi = \gamma - \alpha$. Если углы равны, то равны и их тангенсы:



$$tg\,\phi = tg(\gamma-\alpha) = \frac{tg\gamma - tg\,\alpha}{1+tg\,\gamma\cdot tg\,\alpha}; \qquad tg\,\phi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2},$$ а

$$\phi = arctg\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}.$$

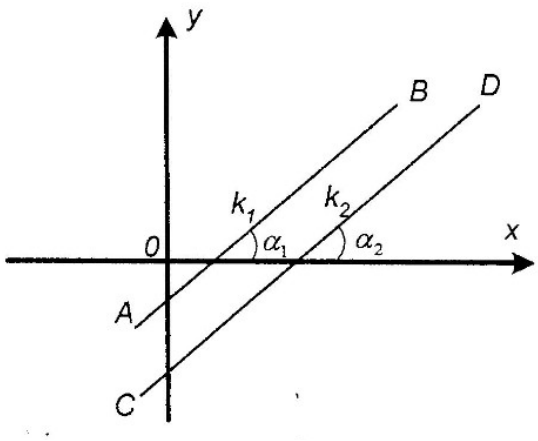
37.Условия параллельности и перпендикулярности прямых.

38.

В прямоугольной системе координат даны прямые AB ‖ CD.

Следовательно, $a_1 = a_2$ и $tg\,\alpha_1 = tga_2$, $tg\,\alpha_1 = k_2$ и $tga_2 = k_2$

$k_1 = k_2$ - угловые коэффициенты равны.



39.

В прямоугольной системе координат даны прямые AB ⊥ CD. Так Как прямая AB перпендикулярна CD,

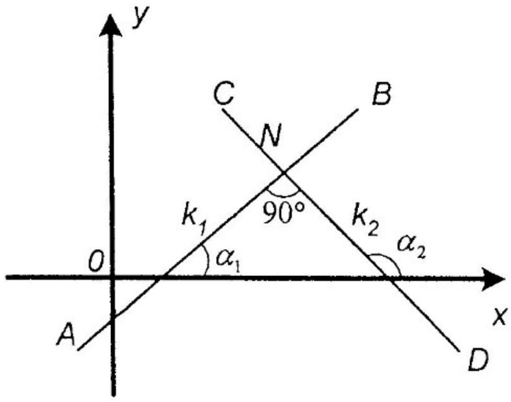
то угол $\phi = 90^\circ$,

$tg90^\circ = \frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}$ $\quad tg90^\circ = \infty$,

а следовательно, $\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2} \notin \infty$,

следовательно $1+k_1\cdot k_2 = 0$, а

$k_2 = \frac{1}{k_1}$. Угловые коэффициенты обратны величине и противоположны по знаку.



40.Примеры решения задач.

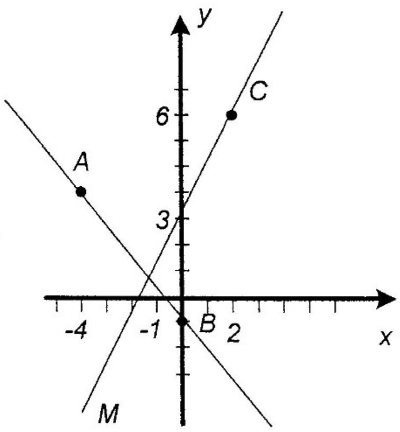
41. Задача №1.

42.

Даны точки A (-4;3), B (0; -1), C (2;6). Составить уравнение прямой, проходящей через точку C, перпендикулярно AB.

CM⊥AB $\Rightarrow K_{см} = -\frac{1}{K_{AB}}$

Составим уравнение AB:



$$\frac{x-X_A}{X_B-X_A}=\frac{y-y_A}{y_B-y_A}$$

$$\frac{X+4}{0+4}=\frac{y-3}{-1-3}\Rightarrow\frac{x+4}{4}=\frac{y-3}{-4}|:4$$

x+4=-y+3

y=-x-1 – уравнение AB. $K_{AB}=-1\Rightarrow K_{CM}=1$.

Составим уравнение CM в виде с угловым коэффициентом $y=k\cdot x+b$; получим $y=x+b$. Т.к. $C\notin CM$, то ее координаты удовлетворяют уравнению CM. Подставим координаты C в уравнение CM и найдем b: $6-2+b\Rightarrow b=4$. Тогда y=x+4 – уравнение CM.

Ответ: y=x+4

43.Задача №2

44.

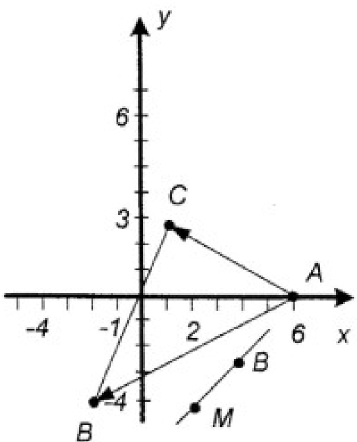
Дан $\Delta ABC;$ A(6;0), B(-2;-4), C(1;3). Найти угол A и уравнение прямой, проходящей через точку D(4;-4), параллельно стороне BC.

1) Найдем $\angle A$ с помощью скалярного произведения векторов.

$$A\vec{C}=\{-5;3\};A\vec{B}=\{-8;-4\}.$$

$$|A\vec{C}|=\sqrt{25+9}=5,83.|A\vec{B}|=\sqrt{64+36}=10$$

$$A\vec{C}\cdot A\vec{B}=40+12=52.\cos A=\frac{A\vec{C}\cdot A\vec{B}}{|A\vec{C}|+|A\vec{B}|}$$



$\cos A = \dfrac{52}{58.3} = 0,8919$ $\qquad \angle A \approx 26.82^\circ$

2) Составим уравнение DM, используя условие параллельности прямых DM‖BC $\Rightarrow K_{CM} = K_{BC}$.

Составим уравнение BC: $\dfrac{x - x_B}{x_C - x_B} = \dfrac{y - y_B}{y_C - y_B}$.

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y+4}{7} \Rightarrow 7x + 14 = 3y + 12 \Rightarrow 3y = 7x + 2 \Rightarrow y = \frac{7}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow K_{BC} = \frac{7}{3}$$

Тогда $K_{DM} = \dfrac{7}{3}$. Составим BM в виде $y = k \cdot x + b;$ $\quad y = \dfrac{7}{3}x + b$.

Найдем «b» из условия $D \notin DM$, подставив координаты D в уравнение;

$-4 = \dfrac{28}{3} + b.$ $\qquad b = \dfrac{-40}{3}$. Подставим уравнение BM получим:

$y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{40}{3}$.

Ответ: $y = \dfrac{7}{3}x - \dfrac{40}{3}$.

Задача №3

Даны уравнения сторон треугольника:
4x-3y-9=0; 3x+4y+12=0; x-2y+4=0. Найти его вершины, сделать чертеж, вычислить площадь треугольника.

Найдем вершину A:

$$\{4x - 3y - 9 = 0 ¿¿¿¿$$

-25y-75=0

Y=-3

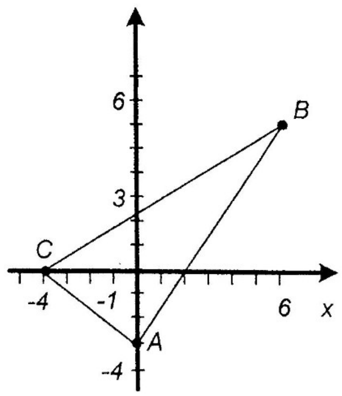
$$\{y = -3 ¿¿¿¿$$

Найдем вершину B:

$$\{3x + 4y + 12 = 0 ¿¿¿¿$$

5x+20=0

x=-4 $\quad \{-4 - 2y + 4 = 0 ¿¿¿¿$



Для нахождения S_{ABC} можно воспользоваться формулой Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p\cdot(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p\cdot c)}$$

$$a = |BC| = \sqrt{10^2+5^2} = \sqrt{125} = 11,18$$

$$y = \frac{7}{3}x - \frac{40}{3}.$$

$$c = |AB| = \sqrt{6^2+8^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$p\frac{11,18+5+10}{2} \approx 13,09$$

$$S_{ABC} = \sqrt{13,09\cdot 1,91\cdot 8,09\cdot 10 = 44,97}(кв.ед.)$$

2. **Выполнить следующие упражнения**

1. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угловой коэффициент *k* и отрезок *b,* отсекаемый ею на оси *Oy:*

1) $k = 4$, $b = 3$; 2) $k = 3$, $b = 0$; 3) $k = Q,$, $b = — 2$;

1. $k = —\frac{3}{4}$, $b = 3$; 5) $k =$ —2, $b =$ — 5; 6) $k = —\frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

2. Определить угловой коэффициент *k* и отрезок *b,* отсекаемый на оси *Oy,* для каждой из прямых:

1) $5x—y + 3 = 0$; 2) $2x+3y — 6 = 0$;

3) $5x + 3y+2 = 0$; 4) $3x+2y; = 0$; 5) $y — 3 = 0$.

3. Дана прямая $5x+3y — 3 = 0$. Определить угловой коэффициент *k* прямой:

1.
   a. параллельной данной прямой;
   b. перпендикулярной к данной прямой.

4. Дана прямая 2x+3y+4 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M_0(2; 1):

1.
   a. параллельно данной прямой;
   b. перпендикулярно к данной прямой.

5. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$2x—3y+5 = 0$, $3x+2y — 7 =$ O

и одна из его вершин *A*(2; —3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

6. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

$x - 2y = 0$, $x - 2y + 15 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей

$7x + y - 15 = 0$. Найти вершины прямоугольника

Практическое занятие № 8 Составление уравнений кривых 2-го порядка, их построение

Цели занятия: Научиться составлять уравнения кривых второго порядка и строить графики

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений кривых второго порядка и построения их графиков**

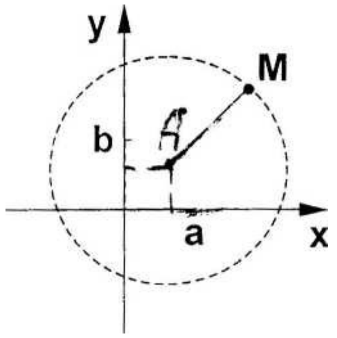
1.Общее уравнение кривой II порядка

Всякое уравнение вида $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ задает единственную кривую II порядка при $A^2 + B^2 \neq 0$; $\{A, B, C, D, E, F\} \in R$.

К кривым II порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их канонические уравнения выводятся из определений.

2.Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом.



Пусть **А (а, Ь)** - центр окружности;
М (х, у) - текущая точка на окружности;
| АМ | = R - радиус.

|АМ | = $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ - уравнение окружности

Раскрыв скобки и приведя подобные, получим общее уравнение кривой II порядка, в котором **A = B, C = 0**.

3. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (2a), большая, чем расстояние между фокусами (2c).

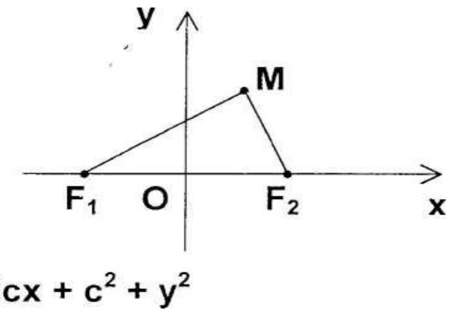
Расположим фокусы на Ox, Oy $\perp$ F_1, F_2, $|OF_1| = |OF_2|$.

M (x, y) - текущая точка эллипса; $A_{1,2}$ ($\pm$ a, 0), B (0, $\pm$ b) - вершины;

F, (-c, 0), F_2 (c, 0) - фокусы; 2c - расстояние между фокусами;

2a - сумма расстояний от точки до фокусов; 2a > 2c (по определению).

| MF_1| + | MF_2 | = 2a (по определению)



$$\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$$

$$4cx+4a=4a\sqrt{x^2+2cx+x^2+y^2}$$

$a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + 2a^2cx + c^2x^2$

$(a^2 - c^2)\, x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$.

По определению $a^2 - c^2 > 0$; пусть $a^2 - c^2 = b^2$ $\left(c=\sqrt{a^2-b^2}\right)$ $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

- каноническое уравнение эллипса с центром в точке **O(0;0).**

Если центр эллипса лежит в точке **A(x_1; y_1),** то уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси (большая ось - на которой лежат **$F_{1,2}$**).

$$e=\frac{c}{a}\left(e=\frac{c}{b}\right)$$, где $$c=\sqrt{a^2-b^2} \qquad c=\sqrt{b^2-a^2}$$

4. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная **(2a),** меньшая, чем расстояние между фокусами **(2c). (2a < 2c).**

Пусть **F_1 (-c;** 0), **F_2 (c;** 0) - фокусы, лежащие на оси **Ox;**

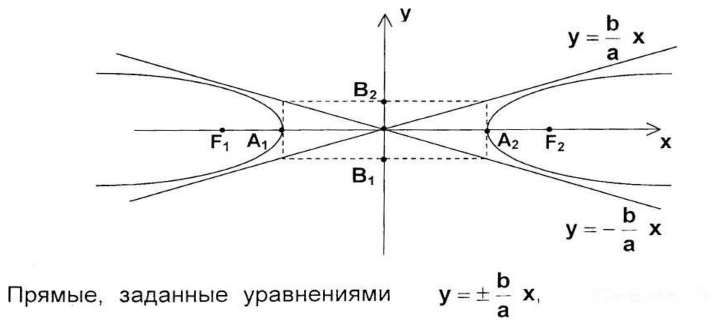
M (x; y) - текущая точка гиперболы.

По определению || MF_1| -|MF_2 ||= 2a, 2a < 2c.

При этом вершины гиперболы лежат в точках **$A_{1,2}$ (± a; 0),** и **$B_{1,2}$ (0; ±b).**

Аналогично выводу канонического уравнения эллипса, по определению, выводим уравнение гиперболы и получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$; $b^2=c^2-a^2$; $e=\frac{c}{a}$ - эксцентриситет гиперболы.



Прямые, заданные уравнениями $y=\pm\frac{b}{a}x$, называются асимптотами гиперболы. Ось на которой лежат фокусы, называется действительной, другая ось - мнимая. Если $F_{1,2}$ ϵ **Oy**, то уравнение гиперболы имеет вид:

$$-\frac{x}{a}+\frac{y^2}{b^2}=1$$; $\left(e=\frac{c}{a};\right.$ $a^2=b^2-c^2$).

При **a = b** гипербола называется равносторонней.

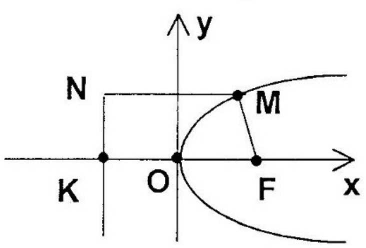
Если центр гиперболы смещен в точку M_1 (x_1; y_1), то ее уравнение имеет вид:

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}-\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$$ (или $$\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}=1$$).

5. Парабола

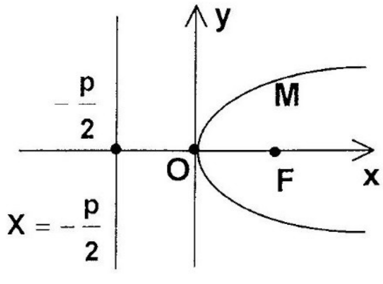
Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой параболы.

$$|MN|=|MF|$$; M(x,y); $K\left(-\frac{p}{2};0\right)$; $F\left(\frac{p}{2};0\right)$



Каноническое уравнение параболы получим, если за одну из координатных осей берется ось параболы, а другая ось - прямая, перпендикулярная первой оси и проведенная через середину отрезка между фокусом и директрисой. Тогда уравнение параболы будет иметь вид:

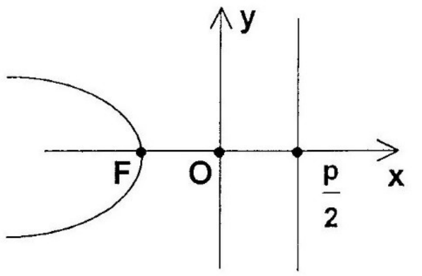
1) $y^2=2px$



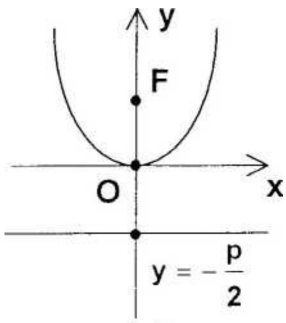
$x=-\frac{p}{2}$ - директриса;

P=KF-параметр

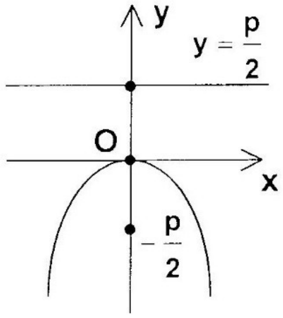
2) $y^2=-2px$



3) $y^2=2py$



4) $y^2=-2py$



Если вершина параболы смещена в точку M_1 (x_1; y_1), то ее уравнение имеет вид:

$(y-y_1)^2=\pm 2p(x-x_1)$ или $(x-x_1)^2=\pm 2p(y-y_1)$.

Преобразование общего уравнения кривой II порядка к каноническомувиду.

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы являются частными случаями уравнений кривой II порядка вида $\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$ (член Bxy отсутствует, т.к. рассматривается параллельный перенос осей координат в точку (х-ь yi), а не поворот осей).

Выяснение вида уравнения производится методом выделения полных квадратов.

Пример.

Выяснить, какую линию определяет данное уравнение и построить ее.

$\mathbf{4x^2 + 9y^2 + 16x - 18y - 11 = 0}$

$\mathbf{4(x^2 + 4x) + 9(y^2 - 2y) = 11}$

$\mathbf{4[(x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4) - 4] + 9[(y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y + 1) - 1] = 11}$

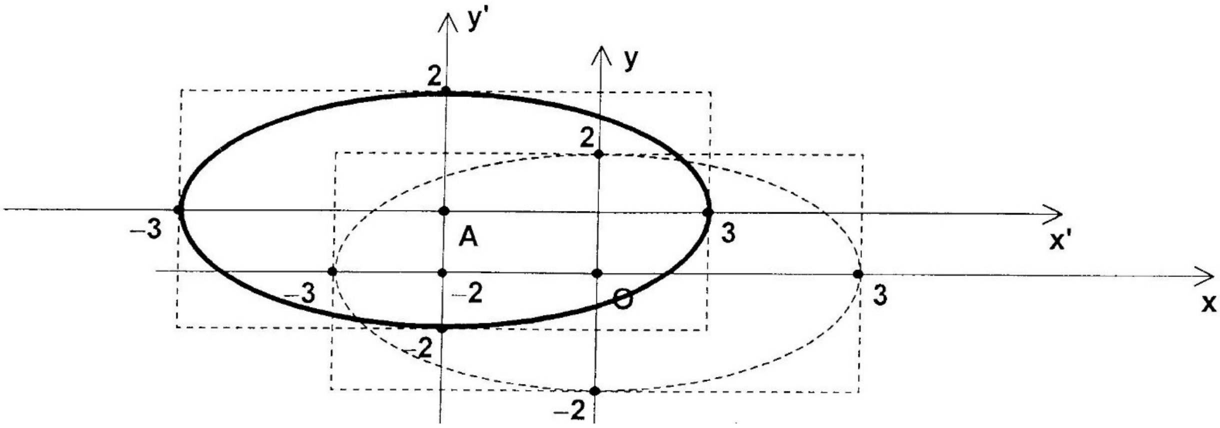
$\mathbf{4(x + 2)^2 - 16 + 9(y - 1)^2 - 9 = 11}$

$\mathbf{4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 11 + 25}$

$\mathbf{4(x + 2)^2 + 9(y - 1)^2 = 36.}$ $\quad$ **| : 36**

$$\frac{(x+2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

Тогда центр A(-2; 1); a = 3; b = 2.



Раздел: Кривые второго порядка

Примеры решения задач

№ 1. Окружность проходит через три точки: M (-1; 5), N (-2; -2), D (5; 5). Составить ее уравнение.

В задаче необходимо подставить координаты точек в уравнение

$(x-a)^2+(y-b^2)=R^2$ и получается система вида :

$$\left|(-1-a)^2+(5-b)^2=R^2 ¿ \right|(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2 ¿¿¿¿$$

Так как в системе правые части равны, то можно составить равенства вида:

$(-1 - a)^2 + (5 - b)^2 = (-2 - a)^2 + (-2 - b)^2$ **(1)**
$(-1 - a)^2 + (5 - b)^2= (5 - a)^2 + (5 - b)^2$ **(2)**

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получится система:

$$\left| a+7b=9 ¿¿¿¿ \right.$$

Решив систему, получаем координаты центра, а потом определяем R из одного из уравнений.

Ответы: a=2; b=1; R=5, а уравнение $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

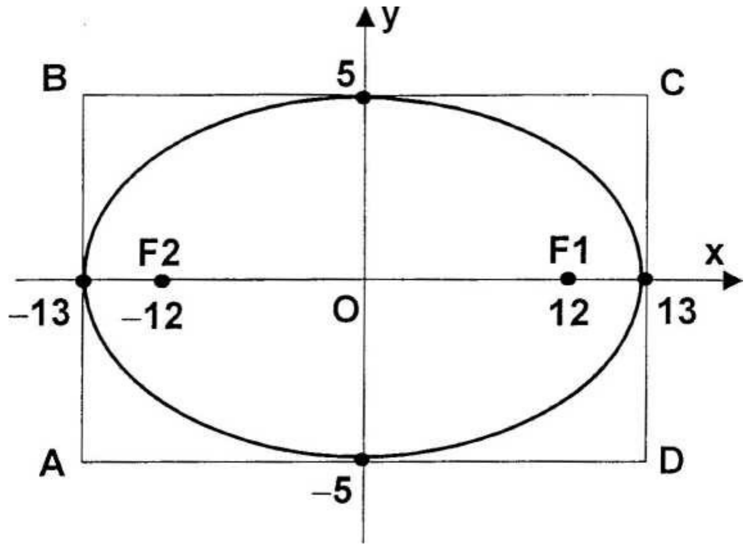
№ 2. Дано уравнение эллипса $\mathbf{25x^2 + 169y^2 = 4225}$. Определить **2a, 2b,**

c, e и построить эллипс. Для решения этой задачи привести уравнение эллипса $25x^2 + 169y^2 = 4225$ к виду $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и определить **a** и **b**, а потом **2a** и **2b**. Найдя **a** и **b** , определить с и е и построить эллипс.

Нужно поделить все члены на **4225** и получить уравнение.

$$\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{25}=1$$

отсюда:



$a^2=169$	$b^2=25$
$a=\pm13$	$b=\pm5$
$2a=26$	$2b=10$

$c^2=a^2-b^2=169-25=144$, а $c=\pm12$ и $F(\pm12;\ 0)$

$e=\frac{c}{a}=\frac{12}{13}\approx$ **0,9**

№ 3. В эллипс вписана окружность $x^2 + y^2 = 16$, проходящая через его фокусы. Составить уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси **Oy**. Сделать построение. Из него видно, что **R = C = 4** и **a = 4**, **a b** нужно найти. Ответ: $2x^2 + y^2 = 32$.

№ 4. Гипербола проходит через точки: **A (-5; 2)** и **B (** $2\sqrt{5}$ **;** $\sqrt{2}$ **).** Составить ее уравнение, если фокусы ее лежат на оси **Ox.**

№ 5. Асимптоты гиперболы заданы уравнениями $y=\pm\frac{5}{3}x$ и гипербола проходит через точку **A (6; 9)**. Составить ее уравнение.

№ 6. Две вершины эллипса лежат в фокусах гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса. Написать уравнение гиперболы, если уравнение эллипса есть

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$$

Решение № 4 Для решения четвертой задачи необходимо получить систему вида:

$$\begin{cases}\frac{25}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\text{¿¿¿¿}\end{cases}$$

решение которой дает значения **a** и **b**. Ответ: **$2x^2$ - $5y^2$ = 30.**

Решение № 5 Для решения пятой задачи получаем систему:

$$\begin{cases}\frac{b}{a}=\frac{5}{3}\text{¿¿¿¿}\end{cases}$$

Ответ: **$25x^2$ -$9y^2$=171**

Решение № 6 Для решения шестой задачи необходимо составить чертеж, соответствующий условию задачи. Из чертежа видно, что a_2 = $c_э$ и c_2 = $a_э$. Исходя из этого, найти $c_э$, $a_э$, $Ь_э$ а потом определить a_2 и b_2, и записать уравнение.

Ответ: $9x^2$ - $7y^2$ = 63.

№ 7

F (5; 0). Составить уравнение параболы и уравнение директрисы.

F (0; 4). Составить уравнение параболы и уравнение директрисы.

№ 8 Парабола симметрична оси **Ox** и проходит через точку **M (1; —4).** Составить ее уравнение.

№ 9 Парабола симметрична оси **Oy** и проходит через точку **N (6; -2).** Составить ее уравнение.

Решение № 7 В седьмой задаче $\frac{p}{2}=5$, а **p = 10**

Ответы: **y^2 = 20x** и уравнение директрисы **x = -5.**

Решение № 8 В восьмой задаче координаты точки **М (1; -4)** подставляем в уравнение $y^2 = 2px$ и находим **р.**

Ответ: $y^2 = 16x$.

Решение № 9 В девятой задаче поступить аналогично.

Ответ: $x^2 = -18y$.

№10 Составить уравнение эллипса, определить координаты фокусов и эксцентриситет, если оси его равны **8** и **4.**

№11 Расстояние между фокусами **2с = 6** и большая ось **=10.** Составить уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси **Ox**.

Решение №10 Дано, что **2a = 8** и **2b = 4.** Найти **a** и **Ь,** и подставить в уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Ответ: $4y^2 + x^2 = 16$.

Из формул $c^2 = a^2 - b^2$ и $e=\frac{c}{a}$ найти **c** и **e.**

Ответ: F(± $2\sqrt{3}$;0) **и** e ≈ 0,9.

***Решение* № 11** Дано $2c = 6$ и $2a = 10$. Найти c и a, а потом из $c^2 = a^2 - b^2$ найти b и составить уравнение.

Ответ: $16x^2+25y^2=400$

2.

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

$$2x^2 + 2y^2 – 8x + 5y – 4 = 0.$$

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

$$x^2 + y^2 – 4x + 2,5y – 2 = 0$$

$$x^2 – 4x + 4 –4 + y^2 + 2,5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 – 25/16 – 6 = 0$$

$$(x – 2)^2 + (y + 5/4)^2 = 121/16$$

Отсюда находим O(2; -5/4); R = 11/4.

Практическое занятие № 9 Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду

Цели занятия: Научиться приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду**

Пример.Пусть дано уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

определяющее кривую второго порядка.

Рассмотрим произведение A*C:

1. Если A*C> 0, то кривая определяет эллипс, может быть окружность;
2. Если A*C< 0, то кривая определяет гиперболу;
3. Если A*C= 0, то кривая определяет параболу.

Приводим данное уравнение к каноническому виду путем выделения полного квадрата.

Исследуйте уравнение $4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$ и определите вид полученной кривой

Сначала определяем тип кривой, находим произведение A*C

A*C=4*9=36>0, следовательно, искомая кривая – эллипс.

Выделяем полный квадрат:

$4x^2+9y^2-8x-36y+4=0$

$4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$

$(2x)^2-2*2x*2+4-4+(3y)^2-2*3y*6+36-36+4=0$

$(2x-2)^2+(3y-6)^2-36=0$

$4(x-1)^2+9(y-2)^2=36$

Разделим обе части на 36:

$(x-1)$^2/9+$(y-2)$^2/4=1

Получилось каноническое уравнение эллипса.

2. **Выполнить следующие упражнения**

Определить тип кривой второго порядка и построить ее график.

1. $4x^2-y^2-4=0$
2. $x^2+y^2+6x+2y+1=0$
3. $4x^2+36y^2-16x+72y-92=0$
4. $25x^2-100=4y^2$
5. $x^2+y^2-10y=0$
6. $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$
7. $x^2+2x-20y-79=0$
8. $x^2-4y^2+8y-8=0$
9. $x^2+y^2+4x-2y-4=0$
10. $x^2+4y^2-16=0$
11. $x^2+y^2-2x+4y-20=0$
12. $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$

Упражнения для самостоятельной работы

1. $x^2-y^2-16=0$
2. $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$
3. $9x^2+4y^2-18x-8y-23=0$
4. $4x^2+9y^2-18y-27=0$
5. $9x^2-4y^2+8y-40=0$
6. $x^2+y^2+2x-2y-2=0$
7. $4x^2+y^2-8x+2y+1=0$
8. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$
9. $x^2-y^2-25=0$
10. $4x^2-y-4=0$
11. $x^2-y^2-4=0$
12. $25x^2-100+4y^2=0$
13. $x^2+y^2+10y=0$
14. $4x^2-y^2-64=0$
15. $x^2+4y^2+2x-3=0$
16. $-2x^2-16x+2y-10=0$

Тест по разделу «Элементы аналитической геометрии»

1. Даны уравнения линий y^2=x, y=x^2+1, x-y=0. Найти среди них уравнение прямой

1.
   a. y^2=x
   b. y=x^2+1
   c. x-y=0

2. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, радиусом равным 2

1.
   a. x^2 + y^2 = 4
   b. x^2 + y^2 = 2
   c. (x – 2)^2 + (y – 2)^2 = 4

3. К кривым второго порядка не относится

1.
   a. гипербола
   b. прямая
   c. эллипс

4. Какого типа уравнения прямой не существует

1.
   a. каноническое уравнение прямой
   b. уравнение прямой с угловым коэффициентом
   c. естественное уравнение прямой

5. Найдите уравнение эллипса
   a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
   b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
6. Найдите уравнение гиперболы
   a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
   b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
7. Найдите уравнение окружности
   a. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$
   b. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$
   c. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
8. Даны векторы $\vec{a} = (2;-3), \vec{b} = (-2;-1)$, тогда координаты вектора $3\vec{b} - 4\vec{a}$ равны
   a. (–14; –15)
   b. (–14; 9)
   c. (–14; 5)
9. Найдите каноническое уравнение прямой
   a. $x + 3y - 3 = 0$

b. $\frac{x-2}{-6}=\frac{y+11}{5}$

c. $y=x-10$

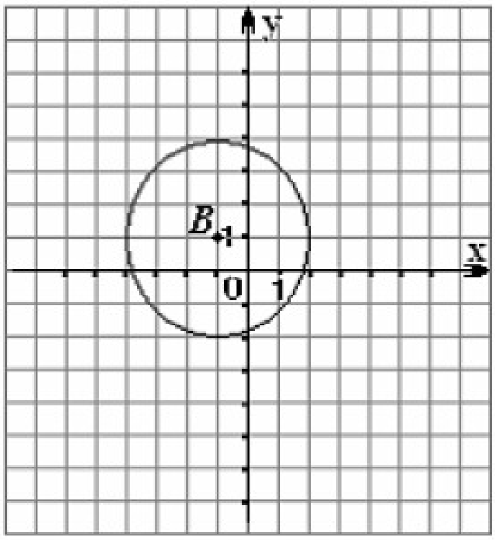
10. Найдите уравнение прямой с угловым коэффициентом

a. $x+3y-3=0$

b. $\frac{x-2}{-6}=\frac{y+11}{5}$

c. $y=x-10$

11. Уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид



a. $(x+1)^2+(y-1)^2=6$

b. $(x+1)^2+(y-1)^2=9$

c. $(x+1)^2-(y-1)^2=3$

Раздел 3. Основы математического анализа

Тема 3.1 Теория пределов. Непрерывность функций

Практическое занятие № 10 Вычисление пределов числовых последовательностей. Вычисление пределов функций. Раскрытие неопределенностей

Цели занятия: Научиться вычислять пределы числовых последовательностей и пределы функций. Изучить правила раскрытия неопределенностей.

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами вычисления пределов числовых последовательностей и функций**

Техника вычисления пределов.

При вычислении предела элементарной функции f(x) приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция f(x) определена в предельной точке x=a. Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

2. Функция f(x) в предельной точке x=a не определена или же вычисляется предел функции при x—>со. Тогда вычисления предела требует в каждом случае

индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее, простых) вопрос сводится непосредственно к применению теорем о свойствах бесконечно больших и бесконечно малых функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция f(x) в точке x=a или при x —со представляет собой неопределенность

$$(\text{ типа } \frac{0}{0} \frac{\infty}{\infty}, 0, -\infty, \infty, 1^{\infty}, 0^{\infty}, \infty^{0})$$

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов.

1. Если существуют

$$\lim_{x \to a} f_1(x) u \lim_{x \to a} f_2(x)$$

То:

а) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

б) $\lim\limits_{x\to a}[f_1(x)\times f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \times \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$

в) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$ $[\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0]$

2. Если в некоторой окрестности точки x=a (кроме, быть может, точки a) выполнено условие f(x) = (x) и если предел одной из этих функций в точке a существует, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \varphi(x)$$

3. Если существует $\lim_{x\to a}\varphi(x)$ и f(x) – элементарная функция, то

$$\lim_{x\to a} f[\varphi(x)]=f¿¿$$

Например,

$$\lim\sqrt{\varphi(x)}=\sqrt{\lim\varphi(x)},\lim\log_c\varphi(x)=\log_c\lim\varphi(x)$$

1. Первый замечательный предел:

$$\lim\frac{sinx}{x}=1$$

Следствия: $\lim\frac{tgx}{x}=1;\ \lim_{x\to ¿}\frac{sinax}{¿}¿=\frac{a}{b}$

<u>Пример.</u>. Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

<u>Решение.</u>

Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и [redacted] являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim_{x\to\infty}(5x^2+1)=\infty, \lim_{x\to\infty}(7x^5+2x+3)=\infty$. Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$.

Для раскрытия этой неопределенности выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

<u>Пример.</u> Найти $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

<u>Решение.</u>

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

<u>Пример.</u>. Найти $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

<u>Решение.</u>

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \left\{\frac{0}{0}\right\} = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

<u>Пример.</u> Найти предел [redacted].

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

$$x2 – 6x + 8 = 0; \; x2 – 8x + 12 = 0;$$

$$D = 36 – 32 = 4; \; D = 64 – 48 = 16;$$

$$x_1 = (6 + 2)/2 = 4; \; x_1 = (8 + 4)/2 = 6;$$

$$x_2 = (6 – 2)/2 = 2 \; ; \; x_2 = (8 – 4)/2 = 2;$$

Тогда [redacted]

<u>Пример.</u> Найти предел.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

$$x^2 – 3x + 2 = (x – 1)(x – 2)$$

$$x^3 – 6x^2 + 11x – 6 = (x – 1)(x – 2)(x – 3), \text{ т.к.}$$

$$x^3 – 6x^2 + 11x – 6 \quad x - 1$$

$x^3 – x^2 \quad x^2 – 5x + 6$

$- 5x^2 + 11x$

$- 5x^2 + 5x$

$6x - 6$

$6x - 6 \quad 0$

2. Выполнить следующие упражнения

1. Вычислить предел последовательности.

1. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(2n+1)!+(2n+2)!}{(2n+3)!}$.

2. Доказать по определению предела..

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{x+5}=2$

2. Вычислить пределы функций.

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to5}\frac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$; 4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{arctg3x}{4x}$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+6}-\sqrt{x^2-5}}{\sqrt[3]{8x^3+3}+\sqrt[4]{5x^3+1}}$; 9) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4+3x^3-2x-2}{2x^3+8x^2+5x-15}$.

11) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{\ln(1+9x)}$; 12) $\lim\limits_{x\to1}\frac{7x^5+8x^4-5x^3-13x+3}{x^2-21x+20}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$; 15) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+1)!+(2x+2)!}{(2x+3)!+(2x+2)!}$;

16) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$; 17) $\lim\limits_{x\to7}\frac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей

Цели занятия: Научиться раскрывать неопределенности с помощью замечательных пределов

Ход занятия:

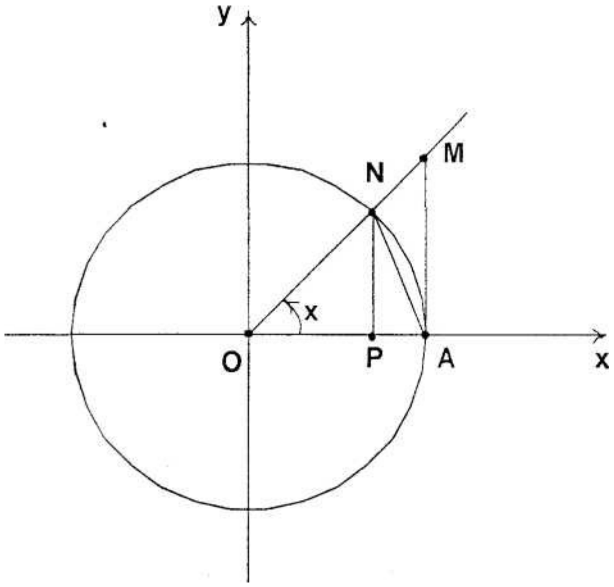
1. **Ознакомиться с примерами вычисления пределов функций с помощью замечательных пределов**

Тема: “I и II замечательные пределы”.
Цель: 1) расширить представление о неопределенности и методах раскрытия
выработка навыков вычисления пределов
формирование культуры логического мышления.
Ход урока:

1. I замечательный предел, его следствия.

Рассмотрим $\lim \frac{xins}{x}$. В данном случае использование теоремы о пределе частного дает неопределенность вида 0/0. используем геометрические соображения.

Возьмем окружность радиуса R и центральный угол x, выраженный в радианной мере. OA=R. Проведем хорду через AM и касательную AM.



По чертежу видно что: площадь ∆ AOM < площади сектора ∆ AOM < площади ∆ AON.

Выразим формулами эти площади:

$$\frac{OA \cdot PM}{2} < \frac{OA \cdot \overline{AM}}{2} < \frac{OA \cdot AN}{2}$$

Сократим на $\frac{OA}{2}$ и получим

PM < $\overline{AM}$ < AN

Разделим равенство на R (R>0):

$$\frac{PM}{R} < \frac{\overline{AM}}{R} < \frac{AN}{R} (¿)$$

Но по определениям $\frac{PM}{R} = \sin x$

$$\frac{AN}{R} = \operatorname{tg} x; \quad \frac{\overline{AM}}{R} = x.$$

<u>Пример.</u>. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$.

Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim\limits_{A\to 0}\frac{\sin A}{A}=1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k1=k.$$

<u>Пример.</u>. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2}{x+1}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2x}{x+1}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

2. Выполнить следующие упражнения

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+x+1}{2x^2+4x-1}\right)^{-x^2}$$

$$\lim_{x\to-\pi}\frac{\sin 2x}{x(\pi+x)};$$

$$\lim_{x\to-3}(7+2x)^{\frac{1}{x+3}};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2};$$

$$\lim_{x\to 0}2x\cdot ctg5x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}.$$

Практическое занятие № 12 Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Цели занятия: Научиться вычислять односторонние пределы и определять тип точек разрыва

Ход занятия:

1. **Ознакомиться с примерами вычисления односторонних пределов и определения типа точек разрыва**

Тема: “Непрерывность в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва, их классификация.”

Цель: 1) ввести определения непрерывной функции и ее свойств, точек разрыва

2) выработка умения проверять непрерывность функции аналитически, анализировать ее по графику функции.

3) расширение представления о свойствах и графиках функции, выработка навыков построения графиков, исследования свойств функции.

I. Непрерывность функции.

Определение. Функция y = f(x) называется непрерывной в точке x = a, если предел функции в точке x = a совпадает со значением функции в этой точке.

Следует различать односторонние пределы функции в точке, т.е. предел функции слева от точки x = a (записывается $\lim_{x \to a \mp a} f(x)$) и справа от точки x = a (записывается $\lim_{x \to a \mp a} f(x)$

Алгоритм проверки непрерывности.

1. Найти левый и правый предел функции в точке x = a.
2. Найти значение f(a).
3. сравнить полученные значения.

Если $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = f(a) = m, m = const$,то точка x = a называется

точкой непрерывности. Если равенство не выполняется, то точка x = a называется точкой разрыва.

Определение. Функция y = f(x) называется непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства непрерывных функций (теоремы).

Е Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций в точке x =a есть непрерывная в этой точке функция (для частного знаменателя в точке x =a не равна нулю).

2. Элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.

3. Если функция y = f(x) непрерывна на интервале и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого интервала существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.

4. Если функция непрерывна на интервале, то среди значений, принимаемых ею на нем существует наименьшее и наибольшее значения. При этом она принимает все значения между наибольшим и наименьшим.

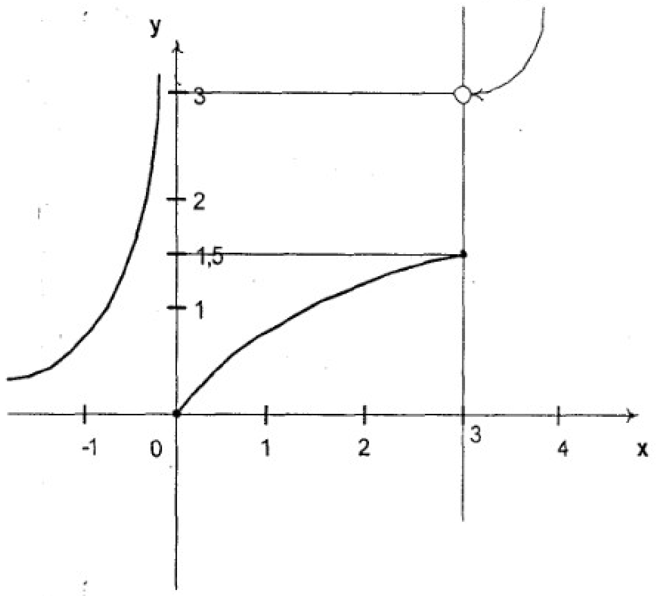
II. Классификация точек разрыва.

1. Если $\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = m \neq f(a) или f(a)$- неопределенно, m=const, то точка,x = a называется точкой разрыва I рода, вид разрыва - устранимый.

2. $\lim_{x \to a \pm 0} f(x) = m \neq f(a) или f(a)$, то точка x = a называется точкой разрыва II рода, вид разрыва - скачок, величина скачка h = |m-n| .

3. Если хотя бы один односторонних пределов равен $\pm\infty$ точке x =a , то точка x =a называется точкой разрыва II рода, вид разрыва - бесконечный.

Пример 1.
Функция y = f(x) заданна графически.



1) x = 0 – точка разрыва II рода (бесконечный разрыв),

т.к. $\lim\limits_{x\to 0-0} y = +\infty$

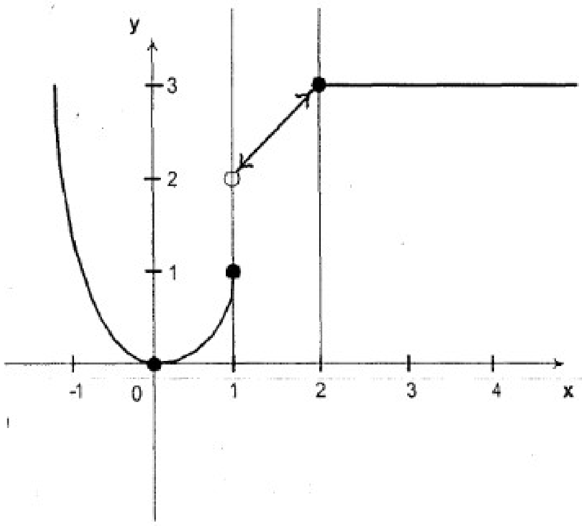
2) x = 3 – точка разрыва II рода (скачок),

т.к. $\lim\limits_{x\to 3-0} y = 1{,}5;\quad \lim\limits_{x\to 3+0} y = 3$

Пример 2.
Построить график функции и исследовать ее на непрерывность:

$$y = \begin{cases} x^2;\ x \le 1 \\ x+1;\ 1 < x < 2 \\ 3;\ x \ge 2. \end{cases}$$

1) $y = x^2$ при $x \le 1$ – парабола с вершиной (0;0), Oy – ось симметрии.
y(1) = 1
2) y = x + 1 при 1 < x < 2 – прямая
y(1) = 2; y(2) = 3.
3) y = 3 – прямая параллельная оси Ox.



1. Рассмотрим точку x = 1.
$\lim\limits_{x\to 1-0} y = 1;\quad \lim\limits_{x\to 1+0} y = 2;\quad y(1) = 1$
условие непрерывности не выполнено ч = 1 – точка разрыва II рода, скачок, h = 1

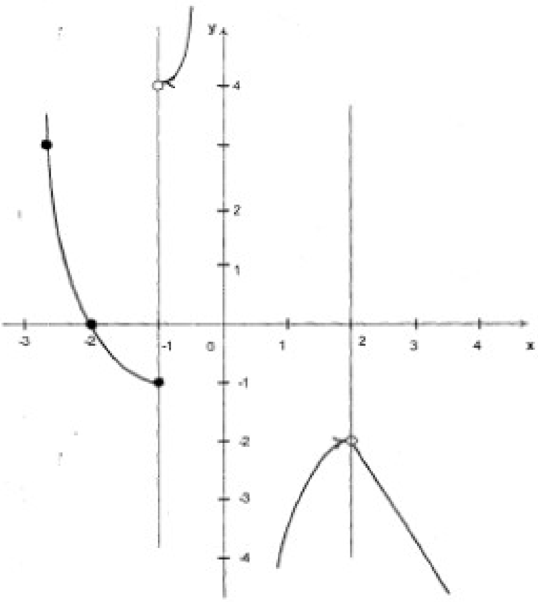
Пример 3.
Построить график, исследовать непрерывность функции

$$y = \begin{cases} x^2 + 2x; \ x \le -1 \\ -\dfrac{4}{x} + 1; \ -1 < x < 2 \\ 4 - 3x; \ x \ge 2. \end{cases}$$

1) $y = x^2 + 2x$ – парабола; $x \le -1$
вершина (-1;-1)
$y(-2) = 0$; $y(-3) = 3$
2) $y = -\dfrac{4}{x}$ - гипербола, (О.О.Ф. $x \ne 0$); $-1 < x < 2$

x	-1	-1/2	-1/3	1/2	1	2
y	4	8	12	-8	-4	-2

3) $y = 4 - 3x$ – прямая; $x \ge 2$.
$y(2) = -2$; $y(3) = -5$



1. Рассмотрим $x = -1$.
$\lim\limits_{x\to-1-0} y = -1$; $\lim\limits_{x\to-1+0} y = 4$; $y(-1) = -1$
$x = -1$ – точка разрыва II рода, скачок.
2. Рассмотрим $x = 0$.
$\lim\limits_{x\to0-0} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0+0} y = -\infty$;
$y(0)$ – *не существует*
$x = 0$ – точка разрыва II рода.
3. Рассмотрим $x = 2$.
$\lim\limits_{x\to2-0} y = -2$; $\lim\limits_{x\to2+0} y = -2$; $y(2) = -2$
$x = 2$ – точка непрерывности.

Пример 4.
Найти точки разрыва функции, выяснить их характер:

$$y = \frac{1}{4x - x^2 - 3}$$

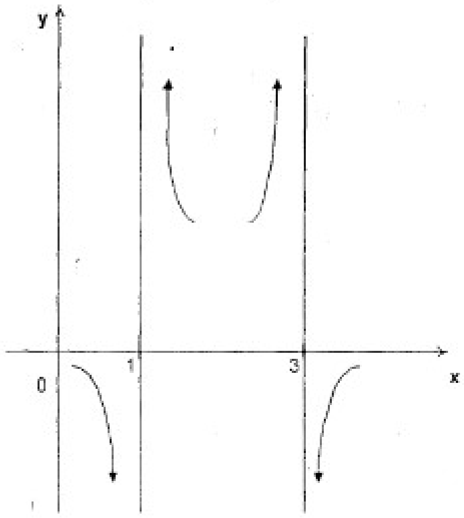
О.О.Ф. $4x - x^2 - 3 \ne 0$
$x^2 - 4x + 3 = 0$
$x_1 = 1, x_2 = 3$
Точки разрыва $x = 1$, $x = 3$. Исследуем их:
1) $x = 1$

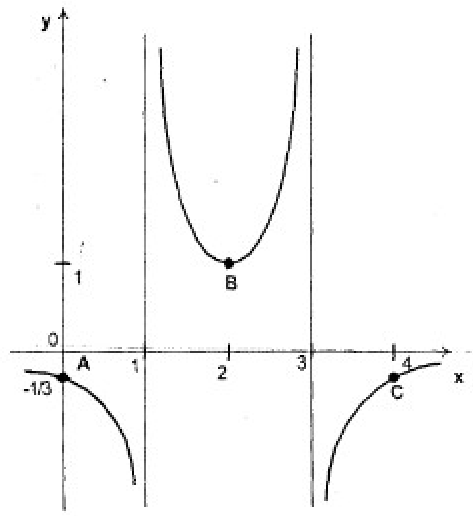
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to1-0} y = -\lim_{x\to1-0}\frac{1}{(x-1)\cdot(x-3)} = -\infty \\ \lim_{x\to1+0} y = -\lim_{x\to1+0}\frac{1}{(x-1)\cdot(x-3)} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 1 - \textit{ точка разрыва II рода}$$

2) $x = 3$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to3-0} y = +\infty \\ \lim_{x\to3+0} y = -\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = 3 - \textit{ точка разрыва II рода}$$

По полученным результатам можно схематично построить график функции и затем его уточнить, вычислив координаты дополнительных точек.





Найдем дополнительные точки.

$y(0) = -\frac{1}{3}$; A $(0; -\frac{1}{3})$

$y(2) = 1$; B $(2;1)$

$y(4) = -\frac{1}{3}$; C $(4; -\frac{1}{3})$

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

в точке x = -1 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

y

3

2

-4 -1 0 1 x

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

в точке x = 0 функция непрерывна в точке x = 1 точка разрыва 1 – го рода

y

2

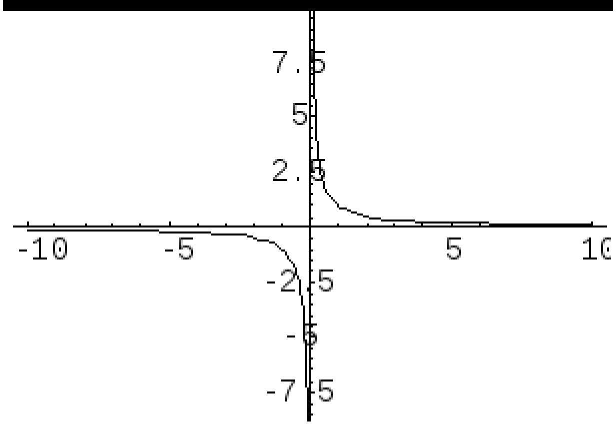
1

-p -p/2 0 1 x

Пример. Функция f(x) = [redacted] имеет в точке $x_0 = 0$ точку разрыва 2 – го рода, т.к.

[redacted].

[redacted]



Пример.. $y = 2^{1/(x-1)}$.

Найдем левый и правый предел функции в точке $x_0 = 3$.

$$\lim_{x \to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x - 3, \\ x \to 3-0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0-0} 2^{\frac{1}{t}} = 0.$$

$$\lim_{x \to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x - 3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t \to 0+0} 2^{\frac{1}{t}} = \infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый бесконечен. Тогда, по определению, $x_0 = 3$- точка разрыва второго рода.

2. Выполнить следующие упражнения

Указать характер точек разрыва функции.

1. $y = e^{\frac{1}{x-7}}$.
2. $y = \ln|x-8|$.
3. $$f_1(x) = \frac{\sin(x+3)}{\sqrt{(x+3)^2}} + \frac{\sin(x-3)}{x^2 - 4x + 3}.$$
4. $$f(x) = \begin{cases} 2 & npu \quad x < -1, \\ 2 - 2x & npu \quad -1 \le x < 1, \\ \ln x & npu \quad 1 \le x. \end{cases}$$

Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Тема «Производная функции, определенно, правило нахождения производной. Физический смысл производной; Производная степенной функции».

Цель:

1. ввести понятие производной
2. дать алгоритм нахождения производной
3. расширить представление учащихся о методах исследования •; функции.

• Ход урока.

1. Определение производной.

Задана непрерывная функция y= f(x)

при $x=x_1$ $y_1 = f(x_1)$

при $x =x_2$ $y_2=f(x_2)$

$\Delta x = X2 - X_1$ -называется приращением аргумента.

$\Delta y= y2-y_1$-называется приращением функции.

Определение. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента бесконечно мало, называется производной данной функции

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y / \Delta x = y'}$$ (или $f'(x)$, или y'_x, или d_y/d_x)

2.. Данное определение носит характер алгоритма. Для нахождения производной функции y= f(x) необходимо выполнить следующие действия;

1. Найти приращённое значение функции $y+\Delta y$
2. *Найти* приращение функции Δy
3. Рассмотреть дробь $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
4. Найти $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Полученный результат является производной.

Занятие 2.

Тема: « Производные функций вида $y=u\pm v$, $y=u*v$; $y=u/v$; где $u=u(x)$, $v=v(x)$.

Цель:

1. вывести формулы дифференцирования суммы, произведения, частного функций.
2. Формировать навыки дифференцирования.

Ход урока.

1. Даны дифференцируемые функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$; $y=u+v$.

Найти y'

Зададим приращение аргумента Δx, тогда функции получат приращения Δu и Δv.

1). $y+\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v$.

2). $\Delta y=u+\Delta u+v+\Delta v-u-v=\Delta u+\Delta v$.

3). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

4). $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}=u'+v'$; $\boxed{(u+v)'=u'+v'}$

При $y=u-v$ аналогично получим $\boxed{(u-v)'=u'-v'}$

2. $y=u*v$. Найти y'

Зададим приращение аргумента Δx, тогда функции получат приращения Δu и Δv.

1). $y+\Delta y=(u+\Delta u)*(v+\Delta v)=uv+u\Delta v+\Delta u\,v+\Delta u\Delta v$.

2). $\Delta y=uv+u*\Delta v+\Delta u*v+\Delta u*\Delta v-uv=u*\Delta v+v*\Delta u+\Delta u*\Delta v$.

3). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{u*\Delta v}{\Delta x}+\dfrac{v*\Delta u}{\Delta x}+\dfrac{\Delta u*\Delta v}{\Delta x}$

4). $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u*\Delta v}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v*\Delta u}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u*\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=u*v'+v*u'+$

$+0*u'=u*v'+v*u'$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, т.к. функция $u=u(x)$- непрерывная $\boxed{(u*v)'=u'*v+u*v'}$

3. $y=u/v$, $v(x)\neq 0$. Найти y'

Зададим приращение Δx, тогда функции получат приращения Δu и Δv.

1). $y+\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$

2). $\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}=\dfrac{uv+\Delta u*v-uv-\Delta v*u}{v(v+\Delta v)}=\dfrac{\Delta u*v-u*\Delta v}{v(v+\Delta v)}$

3). $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta u*v-u*\Delta v}{v(v+\Delta v)}:\Delta x=\dfrac{\Delta u*v/\Delta x-u*\Delta v/\Delta x}{v(v+\Delta v)}$

4). $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta u * v/\Delta x - u*\Delta v/\Delta x}{v(v+\Delta v)} = \frac{\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta u * v/\Delta x - \lim\limits_{\Delta x\to 0} u*\Delta v/\Delta x}{\lim\limits_{\Delta x\to 0} v(v+\Delta v)} =$

$= \frac{u'* v - u* v'}{v^2}$; $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta v = 0$, т.к. $v = v(x)$ - непрерывна. $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'*v-u*v'}{v^2}}$

Замечание.

При $y = C* u$, где $C = const$, $y' = (C)'* u + C* u' = 0* u + C* u' = C* u'$,

$\boxed{(C* u)' = C* u'}$, при $C = const$.

Пример 1.

$y = 2x^4 - 3\sqrt{x} + 4/x^3$; Найти y'.

$y' = 2* 4x^3 - 3* 1/2x^{-\frac{1}{2}} + 4* (-3)*x^{-4} = 8x^3 - 3/2\sqrt{x} - 12/x^4$.

Пример 2.

$y = \frac{2x^3 + 1}{5 - 3x^4}$; Найти y'.

$y' = \frac{(2x^3 + 1)'* (5 - 3x^4) - (2x^3 + 1)* (5 - 3x^4)'}{(5 - 3x^4)^2} = \frac{(2*3x^2+0)*(5-3x^4)-(2x^3+1)*(0-3*4x^3)}{(5 - 3x^4)^2} =$

$= \frac{6x^2* (5 - 3x^4) + (2x^3 + 1)* 12x^3}{(5 - 3x^4)^2} = \frac{30x^2 - 18x^6 + 24x^6 + 12x^3}{(5-3x^4)^2} = \frac{6x^6 + 12x^3 + 30x^2}{(5 - 3x^4)^2} =$

$= \frac{6x^2(x^4 + 2x + 5)}{(5 - 3x^4)^2}$

Занятие 3.

Тема: «Производные основных элементарных функций».

Цель:

1. расширить знания учащихся о производной.
2. улучшить технику взятия производной.
3. формировать глубину понимания логических процессов и связь между изучаемыми темами.

Ход урока.

1. Производная показательной функции.

Дана функция $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$; зададим Δx.

1. $y+\Delta y=a^{x+\Delta x}$
2. $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x=a^x(a^{\Delta x}-1)$
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$
4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x*\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x*\dfrac{1}{\log_a e}=a^x*\ln a.$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=\dfrac{1}{\log_a e}$ - следствие 2 замечательного предела.

$$\boxed{(a^x)'=a^x*\ln a}$$

Следствие:

$(e^x)'=e^x*\ln e=e^x$ $\boxed{(e^x)'=e^x}$

2. Производная логарифмической функции.

Дана функция $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$.

Зададим приращение аргумента Δx.

1. $y+\Delta y=\log_a(x+\Delta x)$.
2. $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a(1+\dfrac{\Delta x}{x})$
3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\log_a(1+\Delta x/x)}{\Delta x}$
4. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(1+\Delta x/x)}{\Delta x/x}*\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}*\log_a e=\dfrac{1}{x}*\dfrac{1}{\ln a}=\dfrac{1}{x\ln a}$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(1+\Delta x/x)}{\Delta x/x}=\log_a e$ - следствие 2 замечательного предела.

$$\boxed{(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}}$$

Следствие:

$(\ln x)'=\dfrac{1}{x\ln e}=\dfrac{1}{x}.$ $\boxed{(\ln x)'=\dfrac{1}{x}}$

Замечание.

$(\lg x)'=\dfrac{1}{x*\ln 10}$ - общий случай.

3. Производные тригонометрических функций.

а). Дана функция y= sin x.

Зададим приращение аргумента Δx.

1). $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$.

2). $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2}=2\cos\frac{(x+\Delta x)}{2}*$

$*\sin\frac{\Delta x}{2}$

3). $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\cos(x+\Delta x/2)*\sin\Delta x/2}{\Delta x}$

4). $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x/2)*\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x}=2*\cos x*\frac{1}{2}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2}=$

$=\cos x$.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x/2}{\Delta x/2}=1$ – следствие 1 замечательного предела. $\boxed{(\sin x)'=\cos x}$

б). Аналогично выводится формула $\boxed{(\cos x)'=-\sin x}$

в). Дана функция y= tg x.

По основному тригонометрическому тождеству $\mathrm{tg}\,x=\frac{\sin x}{\cos x}$.

Рассмотрим $y=\frac{\sin x}{\cos x}$ и найдём производную частного.

$\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'*\cos x-\sin x*(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$; $\boxed{(\mathrm{tg}\,x)'=\frac{1}{\cos^2 x}}$

г). Аналогично случаю (в) выводится формула

$\boxed{(\mathrm{ctg}\,x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}}$

4. Производные обратных тригонометрических функций.

Формулы следует принять без доказательств, а доказать их после темы «Производная сложной функции».

$(\arcsin)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arccos)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\mathrm{arctg})'=\frac{1}{1+x^2}$; $(\mathrm{arcctg})'=\frac{-1}{1+x^2}$.

Пример 1.

$y=\sin x*\ln x$; Найти y'.

$y'=(\sin x)'*\ln x+\sin x(\ln x)'=\cos x*\ln x+\sin x/x$.

Пример 2.

$y=\frac{e^x+x}{2x^3}$; Найти y'.

$y'=\frac{(e^x+1)*2x^3-(e^x+x)*6x^2}{4x^6}=\frac{2x^2(xe^x+x-3e^x-3x)}{4x^6}=\frac{xe^x-2x-3e^x}{2x^4}$

Занятие 4.

Тема: Производная сложной функции. Решение задач.

Цель:

1. уточнить понятие сложной функции.
2. ввести правило дифференцирования сложной функции.
3. закрепить полученные знания.

Ход урока.

1. Сложная функция.

Сложная функция имеет широкое распространение в математике. Например, вычисляя значение функции $y=\sqrt{\sin x+3}$ в точке x_0, сначала приходится вычислять значение $\sin x+3$, а затем находить корень из полученного результата. Т.е. рассматриваются функции $g(x)=(\sin x+3)$ и $f(x)=\sqrt{g(x)}$, т.е. используется функция $y=f(g(x))$, являющаяся сложной.

Пусть заданы две функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$, функция $y=f(g(x))$, являющаяся суперпозицией данных функций, называется сложной.

2. Производная сложной функции.

Теорема. Если функции $y=f(x)$ и $y=g(x)$ дифференцируемы на интервале $[a, b]$ и её производная находится по правилу:

$y'=f'(g(x))*g'(x)$.

Пример 1.

$y=\sqrt{2x^3+1}$; Найти y'.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}}*(2x^3+1)'=\frac{1}{2\sqrt{2x^3+1}}*6x^2=\frac{3x^2}{\sqrt{2x^3+1}}.$$

Пример 2.

$y=\ln\cos 2x$.

$$y'=\frac{1}{\cos 2x}*(\cos 2x)'=\frac{1}{\cos 2x}*(-\sin 2x)*(2x)'=-\operatorname{tg} 2x*2=-2\operatorname{tg} 2x.$$

Пример 3.

$y=e^{\arcsin x}$.

$$y'=e^{\arcsin x}*(\arcsin x)'=e^{\arcsin x}*\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Производные обратных тригонометрических функций.

Дана функция $y=\arcsin x$.

Ей обратной является функция $x=\sin y$, $y\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

Продифференцируем это уравнение.

$(x)'=(\sin y)'$

$1=\cos y*y' \Rightarrow y'=\frac{1}{\cos y}$.

$\cos y=\pm\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$

$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Аналогично выводятся производные и остальных обратных тригонометрических функций.

ЗАНЯТИЕ 6

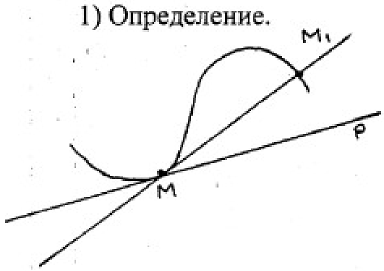
***Тема*:** **«Геометрический смысл производной. Решение задач»**

***Цель*:** 1) Выяснить геометрический смысл производной.
2) Составить уравнение касательной, нормали.
3) Выработка навыков нахождения производной, расширение представления учащихся о применении производной.

Ход урока.

I. Геометрический смысл первой производной.

1) Определение.

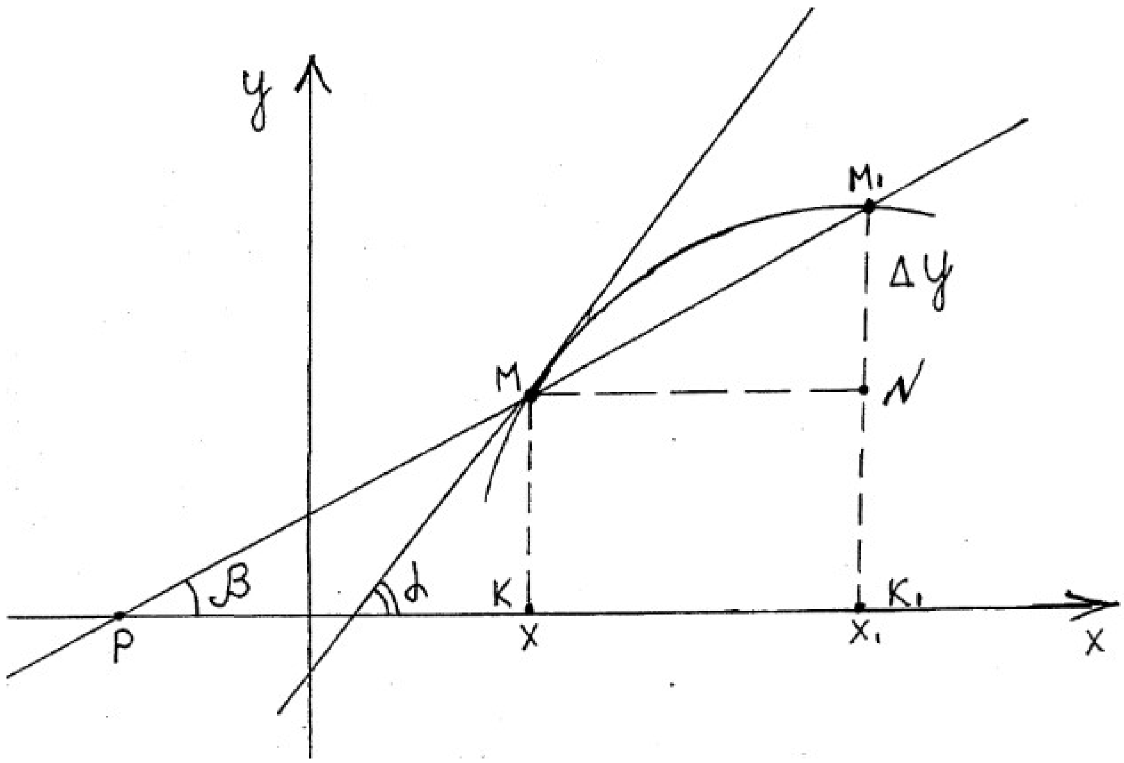


Предельное положение секущей называется касательной ($M_1 \to M$)

M_1M - секущая
MP - касательная

Определение. Перпендикуляр к касательной, восставленный в точку касания, называется нормалью.

2) Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$.
Рассмотрим ее график.



y
M₁
Δy
M
N
β
α
K
K₁
P
x
x₁
x

Возьмем на кривой точку М $(x_1; y_1)$.
Зададим Х приращение ΔX, получим, что У получил приращение $\Delta У$.

$$\Delta x = x_1 - x = KK_1$$
$$\Delta y = y_1 - y = NM_1$$

Проведем NM параллельно 0X, секущую MM_1.
Рассмотрим ΔMM_1N ($\angle N = 90°$).

$$\angle M_1MN = \angle M_1PK = \beta$$

$$tg\beta = \frac{M_1N}{MN} \Rightarrow M_1N = MN \cdot tg\,\beta$$

или

$$\Delta y = \Delta x \cdot tg\,\beta$$

При $\Delta x \to 0$ $\quad tg\,\beta \to tg\,\alpha$ и секущая $MM_1 \to MД$, следовательно:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\,\alpha$$

Тогда $y' = tg\,\alpha$, $\quad tg\,\alpha = k$ - угловой коэффициент касательной

$$y' = k$$

Вывод: Производная функции в некоторой точке равна угловому коэффициенту касательной, проведенной к данной кривой в этой точке.

$$y'(x_0) = k$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент обратен по величине и противоположен по знаку, т.е. уравнение нормали к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$$

Задача 1. Написать уравнение касательной и нормали, проведенной к кривой $y = x^2 + x$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Решение

Из условия видно, что $x_0 = 2$. Найдем y_0:

$$y_0 = y(x_0) = 4 + 2 = 6$$

Найдем угловой коэффициент касательной:

$$y' = 2x + 1$$

$$k = y'(x_0) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y - 6 = 5 \cdot (x - 2)$$

Упростим: $y = 5x - 4$ - уравнение касательной

Угловой коэффициент нормали при этом равен $-1/5$.

Составим уравнение нормали:

$$y - 6 = -1/5 \cdot (x - 2)$$

Упростим: $y = -1/5x + 28/5$ - уравнение нормали.

Задача 2. Найти угол между осью ОУ и касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке с абсциссой $x = 0$

Решение $x_0 = 0$; $y_0 = \cos 0 = 1$.

Точка касания имеет координаты (0; 1),

$$y' = -\sin x\ ; \quad y'(x_0) = -\sin 0 = 0$$

$k = 0$, следовательно уравнение касательной имеет вид :

$$y - 1 = 0\ ; \quad \text{т.е. } y = 1 \text{ - касательная параллельна оси ОХ.}$$

В этом случае она составляет с осью ОУ угол, равный 90°.

Ответ : 90°

Задача 3. Найти угол между касательными к кривым $y = 8 - x$ и $y = 4\sqrt{x+4}$, проведенными в точку их пересечения.

Решение

Угол между двумя прямыми находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2},$$

где φ - искомый угол; k_1, k_2 - угловые коэффициенты прямых.
Найдем абсциссу точки пересечения данных функций:

$$\begin{cases} y = 8 - x \\ y = 4\sqrt{x+4} \end{cases}$$

$8 - x = 4\sqrt{x+4}$, возьмем обе части в квадрат

$64 - 16x + x^2 = 16x + 64$

$x^2 - 32x = 0$; $x(x - 32) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 32$

Данные кривые имеют две точки пересечения, значит будет два угла между касательными:

1) Найдем k_1 и k_2 в точке $x_0 = 0$ и определим φ_1.

$y' = -1$; $y'(0) = -1$ (при любых x); $k_1 = -1$

$$y' = 4\frac{1}{2\sqrt{x+4}} \cdot (x+4)' = \frac{2}{\sqrt{x+4}}; \; y'(0) = 1; \quad k_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{1+1}{1-1} = \infty \;\Rightarrow\; \varphi_1 = 90°$$

1) Найдем k_1 и k_2 в точке $x_0 = 32$ и определим φ_2.

$k_1 = -1$; $k_2 = 2/\sqrt{36} = 1/3$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{33}{1+32} = 1 \;\Rightarrow\; \varphi_2 = 45°$$

Ответ: $\varphi_1 = 90°$; $\varphi_2 = 45°$

Задача4. Найти точки графика функции $f(x) = e^{x} - e^{-x}$, в которых касательная к этому графику параллельна прямой $y = 3/2 \cdot x$

Решение

Найти указанные точки – значит найти корни уравнения.

$f'(x) = 3/2$, так как параллельные прямые имеют равные угловые коэффициенты

Найдем $f'(x) = e^x + e^{-x}$

Рассмотрим уравнение $e^x + e^{-x} = 3/2$

Преобразуем его : $e^x + 1/e^x - 3/2 = 0$, умножим на e^x , где $e^x \neq 0$

$$2e^{2x} - 3e^x + 1 = 0$$

Пусть $e^x = t$, тогда $2t^2 - 3t + 1 = 0$, откуда $t_1 = 1$ и $t_2 = 1/2$

1) $e^x = 1 \Rightarrow x_1 = 0$; $y_1 = 0$; M_1 (0; 0)

2) $e^x = 1/2 \Rightarrow x_2 = \ln 0.5$; $y_2 = e^{\ln 0.5} - e^{-\ln 0.5} = 0.5 - 2 = -1.5$;

M_2 (ln 0.5; - 1.5)

Ответ : в точках $M_1(0; 0)$ и $M_2(\ln 0.5; -1.5)$ касательные к данной кривой параллельны прямой $y = 3/2 \cdot x$.

ЗАНЯТИЕ 9

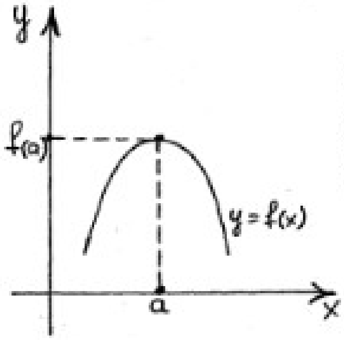
Тема: **«Максимум и минимум функции. Определение, признак, правило нахождения.»**

Цель:
1) Ввести понятие экстремумов функции.
2) Выяснить их признаки.
3) Находить экстремумы функции, пользуясь изученным материалом.

Ход урока.

I. Максимум функции.

Графически задана функция $y = f(x)$.



Если $f(a) > f(x)$ для любых x из некоторого интервала, то $x = a$ называется точкой максимума функции, а $f(a) = y_{мах}$ - *максимальным значением функции.*

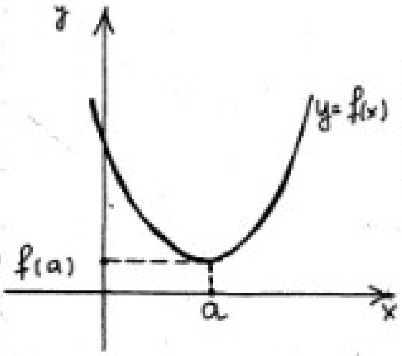
II. Признак максимума.

Если при переходе через критическую точку непрерывности $x = a$ I-я производная функции меняет знак с (+) на (-) то точка $x = a$ есть точка максимума (мах) функции.

Геометрически это можно пояснить тем, что до точки максимума функция возрастает, следовательно $f'(x) > 0$, а после точки максимума функция убывает, следовательно $f'(x) < 0$, т.к. максимум есть наибольшее значение функции на интервале (внутри него).

III. Минимум функции.

Графически задана функция $y = f(x)$.



Если $f(a) < f(x)$ для любых x из некоторого интервала, то $x = a$ называется точкой минимума функции, а $f(a) = y_{min}$ называется *минимумом функции.*.

IV. Признак минимума.

Если при переходе через критическую точку непрерывности $x = a$ I-я производная функции меняет знак с (-) на (+) то точка $x = a$ есть точка минимума (min) функции.

Пояснить самостоятельно.

Все max и min функции называются *экстремумами функции*.

V. Первое правило нахождения экстремумов функции.

Пусть дана функция $y = f(x)$.

1. Найти I-ю производную $y' = f'(x)$.
2. Приравнять ее к нулю и найти корни уравнения $f'(x) = 0$ (учитывая и точки разрыва I-й производной)
3. Отметить на числовой прямой найденные корни и точки разрыва (их сразу пометить). Экстремумов в них быть не может.
4. Исследовать знаки I-й производной в полученных интервалах (учитывая имеющиеся точки разрыва).
5. Если при переходе через стационарную точку (критическую, но не точку разрыва) I-го рода I-я производная меняет знак с (+) на (-), то в исследуемой точке функция имеет max, с (-) на (+) - функция имеет min.
6. Найти значения функции в найденных точках экстремума.

Задача1. Найти экстремумы функции $y = x^3/3 - x^2 - 3x$

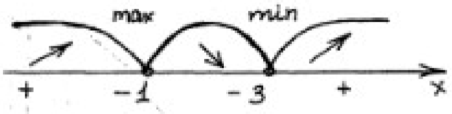
О.О.Ф. : $x \in (-\infty ;+\infty)$, точек разрыва нет

$y(-x) = -x^3/3 - x^2 + 3x \neq y(x) \neq -y(x)$ – функция общего вида.

$y' = x^2 - 2x - 3$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2 \\ x_1 . x_2 &= -3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = +3; \quad x_2 = -1$$



$x \in (-\infty ; -1)$: $y'(-10) = 100 + 20 - 3 > 0$

$y_{мах}(+3) = 9 - 9 + 9 = 9$

A (+ 3 ; 9) - мах;

$y_{min}(-1) = -1/3 - 1 + 3 = 1\ 2/3$

B (- 1 ; 1 2/3) – min.

Задача2. Найти экстремумы функции $y = x/2 + 2/x$

ОДЗ $x \neq 0$, $x = 0$ - точка разрыва функции

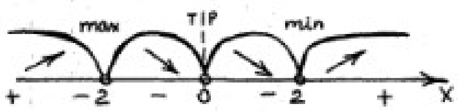
$y(-x) = -x/2 - 2/x = -(x/2 + 2/x) = -y(x)$ - функция нечетная

$y' = 1/2 - 2/x^2$

$1/2 - 2/x^2 = 0$; $\dfrac{x^2 - 4}{2x^2} = 0$

$x = 0$ - точка разрыва I-й производной

$x^2 = 4$; $x_1 = -2$; $x_2 = 2$ - стационарные точки I-го рода



$y'(-10) = \dfrac{100 - 4}{200} > 0$

$y'(-1) = \dfrac{1 - 4}{2} < 0$

$y'(1) = \dfrac{1 - 4}{2} < 0$

$y'(10) = \dfrac{100 - 4}{200} > 0$

$y_{мах}(-2) = -1 - 1 = -2$ A (- 2 ; - 2) - мах;

$y_{min}(2) = 1 + 1 = 2$ B (2 ; 2) - min.

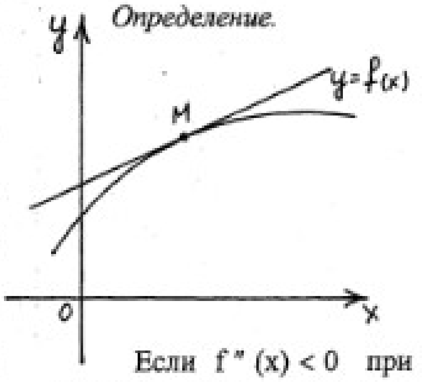
ЗАНЯТИЕ 10

***Тема*: «Выпуклость, вогнутость функции. Определение, признак»**

***Цель*:** 1) Ввести понятие выпуклости, вогнутости.
2) Дать дополнительные сведения о методах исследования графика.

***Ход урока*.**

I. Выпуклость функции.



Определение. Если кривая находится ниже касательной, проведенной к кривой в любой точке интервала, то кривая на этом интервале называется *выпуклой.*

Достаточный признак:

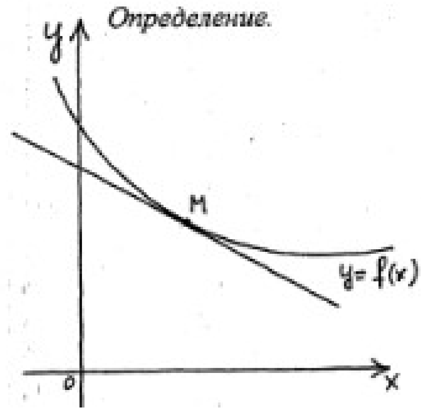
Если функция $y = f(x)$ имеет на некотором интервале отрицательную II-ю производную $y'' < 0$, то функция на этом интервале *выпуклая.*

Если $f''(x) < 0$ при $x \in (a, в)$, то значит I-я производная $y' = f'(x)$ является функцией убывающей, т.е. при возрастании абсциссы X будет уменьшаться угол $\propto$, образованный касательной к кривой и оси OX :

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f'(x_1) > f'(x_2) \Leftrightarrow \propto_1 > \propto_2,$$

но при этом кривая выпуклая.

II. Вогнутость функции.



Определение. Если кривая находится выше касательной, проведенной к кривой в любой точке интервала, то кривая на этом интервале называется *вогнутой (выпуклой вниз).*

Достаточный признак:

Если функция $y = f(x)$ имеет на некотором интервале положительную II-ю производную $y'' > 0$, то функция на этом интервале *вогнута* (доказательство аналогично).

III. Точки перегиба.

Определение. Если точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость (или наоборот), называются *точками перегиба*

Теорема. Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на некотором интервале и x_0 их этого интервала есть точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Точка перегиба может существовать и там, где $f''(x)$ не существует. Например: $y = \sqrt[3]{x}$, для которой

$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x}};$$ при $x = 0$ II-я производная не существует, но $x = 0$ - точка перегиба.

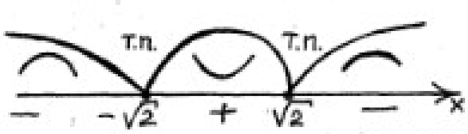
IV. Правило нахождения точек перегиба.

Дана функция $y = f(x)$.

1. Найти $y'' = f''(x)$
2. Найти критические точки II-го рода, решив уравнение $f''(x) = 0$
3. Исследовать поведение II-й производной в окрестностях полученных корней.
4. Если при переходе через критическую точку II-го рода II-я производная меняет знак, то исследуемая точка есть точка перегиба.
5. Найти значение функции в точках перегиба.

Задача. Найти точки перегиба функции.

$$y = 1 + 3x^2 - x^4/4$$
$$y' = 6x - x^3$$
$$y'' = 6 - 3x^2$$
$$6 - 3x^2 = 0$$
$$x^2 = 2$$
$$x_1 = -\sqrt{2} \quad x_2 = \sqrt{2}$$



$$y''(-10) = 6 - 300 < 0$$
$$y''(0) = 6 - 0 > 0$$
$$y''(10) = 6 - 300 < 0$$

$y_{т.п.}(-\sqrt{2}) = 1 + 6 - 1 = 6$ A $(-\sqrt{2}; 6)$ - точка перегиба
$y_{т.п.}(\sqrt{2}) = 1 + 6 - \sqrt{2} = 6$ B $(\sqrt{2}; 6)$ - точка перегиба

V. Второе правило нахождения экстремума функции.

Анализируя полученную информацию, можно заметить, что мах функции находится на интервале выпуклости, а min функции находится на интервале вогнутости. Это дает возможность составить II правило нахождения экстремума.

Пусть дана функция $y = f(x)$

1. Найдем $y' = f'(x)$ и определим стационарные точки I-го рода $x_1, x_2, \ldots x_n$.
2. Найдем $y'' = f''(x)$.
3. Найдем $y''(x_1)$; $y''(x_2)$; ….. $y''(x_n)$.

1) Если $y''(x_i) < 0$, то x_i - точка мах
1) Если $y''(x_i) > 0$, то x_i - точка min
1) Если $y''(x_i) = 0$, то исследовать по I правилу.

ЗАНЯТИЕ 11

Тема: **«Исследование функции и построение графиков»**

Цель: 1) Систематизировать знания о свойствах функции.
2) Построение графика функции.

Ход урока.

График функции строится для того, чтобы сделать наглядной качественную характеристику особенностей функции.

Полное исследование идет по схеме:

1. Область определения функции.
2. Асимптоты.
   Необходимо проводить исследование всех возможных видов асимптот.
3. Четность – нечетность.
   Исследуется по определению.
4. Экстремумы.
   Исследование по I правилу всегда дает результат.
5. Точки перегиба.
   Проводить по имеющемуся правилу. Точка перегиба всегда имеется между двумя ближними точками экстремума, лежащими на интервале непрерывности.

6. Дополнительные точки.
   Для большей точности построения графика полезно вычислять точки пересечения с осями координат (если это возможно).
7. Построение графика.
   По имеющимся данным строят график в системе координат.

Пример 1. Исследовать функцию, построить график.

$$y = x^3 + 6x^2 + 9x$$

1) О.О.Ф. $x \in (-\infty; +\infty)$, функция непрерывна.

2) Асимптот нет.

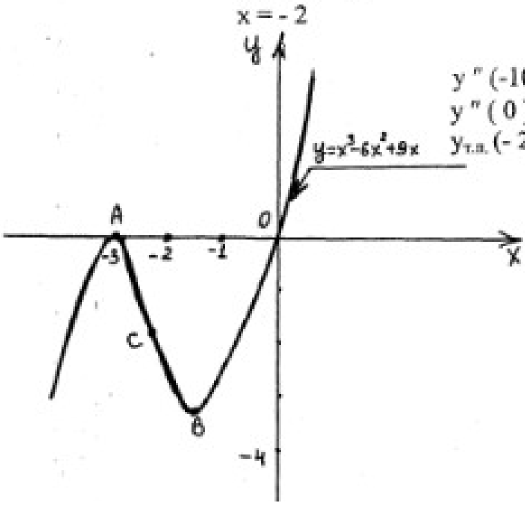
3) $y' = 3x^2 + 12x + 9$
   $3x^2 + 12x + 9 = 0$ - разделим на 3
   $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -4 \\ x_1 \cdot x_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = -3$$

$y'(0) = 9 > 0$

$y_{max}(-3) = -27 + 54 - 27 = 0$ A $(-3; 0)$ - мах;
$y_{min}(-1) = -1 + 6 - 9 = -4$ B $(-1; -4)$ - min.

4) $y'' = 6x + 12$
   $6x + 12 = 0$
   $x = -2$



$y''(-10) = -60 + 12 < 0$
$y''(0) = 0 + 12 > 0$
$y_{т.п.}(-2) = -8 + 24 - 18 = -2$ C $(-2; -2)$ – т.п.

5) $x^3 + 6x^2 + 9x = 0$

$x(x^2 - 6x + 9) = 0$

$x(x - 3)^2 = 0$

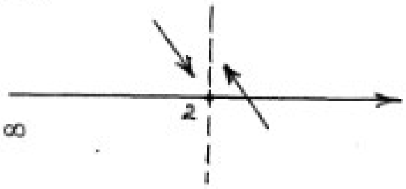
$x_1 = 0; \ x_2 = 3;$ O $(0; 0)$ - доп. точка

Пример 2. Исследовать функцию, построить график.

$$y = \frac{x^2}{x-2}$$

1) $x \in (-\infty;\ 2) \cup (2;+\infty)$

2) $x = 2$ - вертикальная асимптота



$$\lim_{x \to 2-0} y = -\infty \qquad \lim_{x \to 2+0} y = +\infty$$

$\lim\limits_{x \to \infty} y = \infty$ - горизонтальной асимптоты нет.

$$k = \lim_{x \to \infty} y/x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2 - 1} = 1; \quad k = 1$$

$$в = \lim_{x \to \infty} (y - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^2}{x-2} - x\right) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 + 2x}{x-2} = 2$$

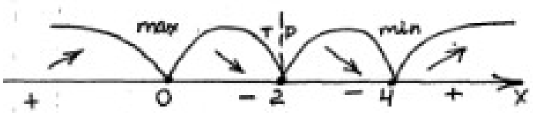
$в = 2$

$y = x + 2$ - наклонная асимптота

x	0	1
y	2	3

3) $$y' = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$$

$x \neq 2$; $x_1 = 0$; $x_2 = 4$



$y'(-1) = 5/9 > 0$
$y'(1) = -3/1 < 0$
$y'(3) = -3/1 < 0$
$y'(10) = 60/64 > 0$

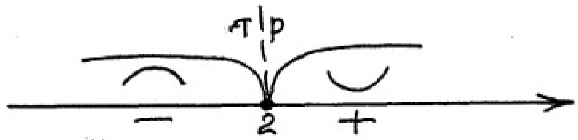
$y_{max}(0) = 0$ $\qquad$ O(0;0) - max
$y_{min}(4) = 16/2 = 8$ $\qquad$ B(4;8) - min

4) $$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x)\,2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)((x-2)^2 - x^2 + 4x}{(x-2)^4} =$$

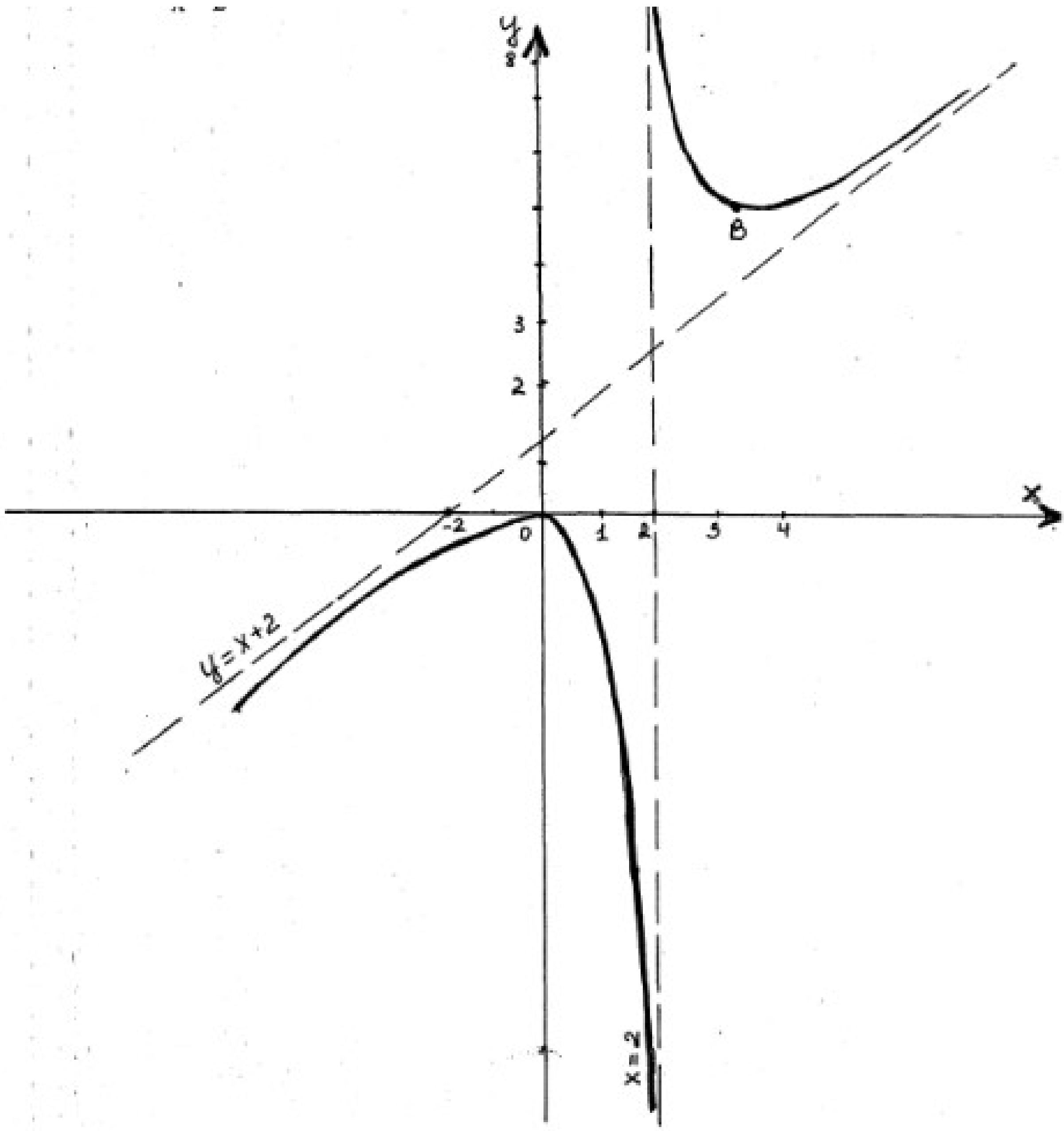
$$= \frac{2(x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x)}{(x-2)^3} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

$\frac{8}{(x-2)^3} = 0$; $x \neq 2$; точек перегиба нет.

$y''(0) < 0$; $\quad y''(10) > 0$



5) $\frac{x^2}{x-2} = 0$; $x \neq 2$; $x = 0$ - доп. точек нет.



y
x
B
3
2
-2
0
1
2
3
4
y=x+2
x=2

Практическое занятие № 13 Вычисление производных сложных функций

Цели занятия: Научиться находить производные сложных функций

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами вычисления производных сложных функций

<u>Пример.</u> Найти производную функции.

Сначала преобразуем данную функцию:

3. **Выполнить следующие упражнения**

1. $y=\frac{x^2-7x+3}{(x-1)^2};\ y'\left(\frac{1}{2}\right)=?$
2. $y=\sqrt[3]{4x}-\frac{5}{\sqrt{x}}-\ln 5$
3. $y=\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^2 5x$
4. $y=e^{-x}\arcsin x$
5. $y=-\frac{1}{60(1-3\cos x)^2}$
6. $y=\frac{1}{5^{x^2}}$
7. $y=\ln^2(\sqrt{1+e^x}-1)$
8. $y=2^{\operatorname{arctg} x^3}$

Практическое занятие № 14 Вычисление производных и дифференциалов высших порядков

Цели занятия: Научиться вычислять производные и дифференциалы высших порядков

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами вычисления производных и дифференциалов высших порядков

а) Производная явной функции

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y=\frac{1}{2}\ln^2 x$

Дифференцируя функцию y, получим $y'=\frac{1}{2}\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{\ln x}{x}$.

Дифференцируя производную y', получим $(y')' = y'' = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$

б) Производная неявной функции

<u>Пример.</u> Для данной неявной функции найти y''.

$$x^2 + y^2 - 4x + 10y + 4 = 0$$

Дифференцируем по x обе части равенства, где y есть функция от x, получаем $2x + 2yy' - 4 + 10y' = 0$

Отсюда найдем y'.

$$y'(2y + 10) = 4 - 2x$$
$$y' = \frac{4 - 2x}{2y + 10} = \frac{2 - x}{y + 5}$$

Найдем y'':

$$y'' = \frac{-1(y+5) - (2-x)y'}{(y+5)^2} = -\left[\frac{y + 5 + (2-x)y'}{(y+5)^2}\right]$$

Подставляем в левую часть найденную производную $y' = \dfrac{2-x}{y+5}$, получаем:

$$y'' = -\left[\frac{y + 5 + (2-x) \cdot \left(\frac{2-x}{y+5}\right)}{(y+5)^2}\right] = -\frac{(y+5)^2 + (2-x)^2}{(y+5)^3} = -\frac{y^2 + x^2 + 10y - 4x + 29}{(y+5)^3}.$$

Учитывая, что $x^2 + y^2 = 4x - 10y - 4$, получим $y'' = -\dfrac{4x - 10y - 4 + 10y - 4x + 29}{(y+5)^3}$ или $y'' = -\dfrac{25}{(y+5)^3}$

2. Выполнить следующие упражнения

Вычислить вторую производную функции

1) $y = (1 + 7x)^4$;

2) $y = \mathrm{tg}\, 5x$

3) $y = \cos^{2} \tilde{o}$

4) $y = \sin^3 4x^2$;

5) $y = e^{\arcsin \frac{1}{x^2}}$

2. Выполнить следующие упражнения

Вычислить предел, используя правило Лопиталя

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(3x)}{x \cdot \cos(x)}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$$

Найти асимптоты графика функции

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$$

Практическое занятие № 16 Нахождение экстремумов. Исследование функции на монотонность. Исследование функции на выпуклость. Точки перегиба

Цели занятия: Научиться находить экстремумы. Научиться исследовать функцию на монотонность и на выпуклость.

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами нахождения экстремумов функций, исследования функций на выпуклость

2. Выполнить следующие упражнения

Провести полное исследование функций методами дифференциального исчисления и построить графики:

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2} - 1}$$

б)

$$y = e^{x^2-2x}$$

в)

$$y = \sin x + \frac{1}{3}\sin 3x$$

Практическое занятие № 18 Контрольная работа № 2. Вычисление производных функций. Исследование функции на монотонность и выпуклость

Цели занятия: Проверить умение студентов вычислять производную функции и исследовать функцию на монотонность и выпуклость.

Ход занятия: Решить предложенные задачи согласно своему варианту

Практическое занятие № 18
Контрольная работа № 2. Вычисление производных функции. Исследование функции на монотонность и выпуклость.

Цель занятия: Проверить уровень знаний и умений студентов

Вариант № 1

Задача 1. Найти производную функции

$$y = x^2 * \sin x$$

Задача 2. Найти вторую производную функции.

$$y = 3x^4 - 15x^2 + 12x - 120$$

Задача 3. Найти производную сложной функции.

$$y = \sin(\ln x)$$

Задача 4. Исследовать функцию на экстремумы

$$y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$$

Задача5. Найти асимптоты графика функции.

$$y = \frac{x^2 - 1}{(x-1)(x+7)}$$

Вариант № 2

Задача 1. Найти производную функции

$$y = \frac{x^2}{\sin x}$$

Задача 2. Найти вторую производную функции.

$$y = 5x^4 + 3x^2 - 4x + 5$$

Задача 3. Найти производную сложной функции.

$$y = \ln(\cos x)$$

Задача 4. Исследовать функцию на экстремумы

$$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$$

Задача5. Найти асимптоты графика функции.

$$y = \frac{x^2 + 1}{(x+3)(x-1)}$$

Вариант № 3

Задача 1. Найти производную функции

$$y = x^3 * \ln x$$

Задача 2. Найти вторую производную функции.

$$y = 3x^5 - 5x^3 + 12x^2 - x$$

Задача 3. Найти производную сложной функции.

$$y = tg(e^x)$$

Задача 4. Исследовать функцию на экстремумы

$$y = x^3 - 6x^2 - 15x - 1$$

Задача5. Найти асимптоты графика функции.

$$y = \frac{2x^2 - 1}{(x-4)(x+5)}$$

Вариант № 4

Задача 1. Найти производную функции

$$y = \frac{x^4}{\cos x}$$

Задача 2. Найти вторую производную функции.

$$y = 2x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 5x$$

Задача 3. Найти производную сложной функции.

$$y = e^{\cos x}$$

Задача 4. Исследовать функцию на экстремумы

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$$

Задача5. Найти асимптоты графика функции.

Тест по теме «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»

1. Чему равен предел функции $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 + x - 6}$
   a. 2/5
   b. 1
   c. 5/2
2. Найти вторую производную функции $y=x^4+5\sin x$
   a. $x^2-5\sin x$
   b. $12x^2-5\sin x$
   c. $12x^2+5\sin x$
3. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна y'=x-4

1.
   a. 0
   b. 2
   c. 1

4. Как называется предел $\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
   a. Первый замечательный предел
   b. Второй замечательный предел
   c. Полезный предел
5. Как находится производная произведения двух функций *U*V*
   a. *U'*V'*
   b. *U'*V+U*V'*
   c. *U'*V-U*V'*
6. Производная функции y=sin x равна
   a. cos x
   b. -cos x
   c. sin x
7. Если для функции выполнено условие f(-x)= f(x), то функция
   a. общего вида
   b. нечетная
   c. четная

8. Чему равен предел функции $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$
   a. 1
   b. 5/3
   c. 3/5
9. Найти вторую производную функции $y=x^3 -4\cos x$
   a. 6x+4cos x
   b. 6x-4cos x
   c. x+4cos x
10. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна $y'=x^2-4$
   a. 0

b. 2
c. 1

11. Как называется предел
    a. Первый замечательный предел
    b. Второй замечательный предел
    c. Полезный предел
12. Как находится производная частного двух функций
    a.
    b. *U'*V+U*V'*
    c.
13. Производная функции y=cos x равна
    a. sin x
    b. -sin x
    c. cos x
14. Если для функции выполнено условие f(-x)= - f(x), то функция
    a. общего вида
    b. нечетная
    c. четная

Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Практическое занятие № 19 Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Цели занятия: Научиться вычислять неопределенные интегралы методами заменой переменной и интегрированием по частям

Всякий раз, когда в математике рассматривается некоторая операция, возникает вопрос об операции, к ней обратной (сложение - вычитание, умножение - деление, возведение в степень - извлечение корня). При рассмотрении обратной операции возникают вопросы:

1) осуществимость операции.

2) единственность операции.

Таким образом, после введения операции дифференцирования возникает вопрос об обратной операции, которая называется

интегрированием. Также нельзя обойти вопросы осуществимости и единственности операции.

Рассмотрим определение:

Если задана функция f(x), то функция F(x), заданная для тех же значений аргумента и удовлетворяющая условию F (x) = f(x) называется первообразной для функции f(x).

Если существует одна первообразная F(x), то значит можно указать множество функций вида F(x) + C, где C = const, тоже являющихся первообразными для функции f(x).

Это можно доказать по определению первообразной. Возьмем производную $(F(x) + C)^1 = F^1(x) + C^1 = F^1(x) + 0 = F^1(x)$

Следовательно функция F(x) + C, где C = const, также есть

I

первообразная для F(x).

Определение: Множество всех первообразных функций F(x) + C, где C = const, называются неопределенным интегралом для функции f(x) dx :

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Таким образом, становится ясно, что действие нахождения неопределенного интеграла является действием неоднозначным.

I

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от него равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x)$$

$$d \left(\int f(x)\, dx \right) = f(x)\, dx$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

$$\int d\, f(x) = f(x) + C$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int k\, f(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$$

4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int (\, f_1(x) \pm f_2(x)\,)\, dx = \int f_1(x) \pm \int f_2(x)\, dx$$

Свойства не доказываются.

Имея представление о том, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию, можно предложить студентам попытаться прочитать эти формулы в обратную сторону и совместно составить таблицу формул интегрирования. Исключение составят в ней формулы 11, 12, которые следует давать в группах младших инженеров, предлагая запомнить.

Таблица простейших интегралов:

1. $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

3. $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

5. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + C$

Можно предложить формулу

13. $\int dx = x + C$

как следствие свойств неопределенного интеграла.

Простейшим методом нахождения неопределенного интеграла является метод непосредственного интегрирования. Суть метода заключается в преобразовании подынтегрального выражения к табличному виду и употреблении подходящей формулы.

Следует рассмотреть некоторые примеры.

$$\int(2x^2-4x+5)dx=2\int x^2dx-4\int xdx+5\int dx=$$

(применим 3, 4 свойства)

$$=2\cdot\frac{x^3}{3}-4\cdot\frac{x^2}{2}+5x+C=\frac{2}{3}x^3-2x^2+5x+C$$

Пример 2:

$$\int\frac{2x^2-3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}}=\frac{2}{4}\int\frac{x^2}{x\sqrt{x}}dx-\frac{3}{4}\int\frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int x^{\frac{1}{2}}dx-\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{3}{4}\ln|x|+C==\frac{1}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{4}\ln|x|+C$$

Пример 3:

$$\int(2^x-1)(2^{-x}+1)dx==\int dx+\int 2^xdx-\int\left(\frac{1}{2}\right)^xdx-\int dx=\frac{2^x}{\ln 2}-\frac{(0,5)^x}{\ln 0,5}+C$$

Пример 4:

$$\int\frac{3x\sin^2x-5}{2\sin^2x}dx=\frac{3}{2}\int xdx-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sin^2x}=\frac{3}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{5}{2}ctgx+C=$$

$$=\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{2}ctdx+C$$

Пример 5:

$$\int \frac{\cos 2x - \cos 4x}{\sin 3x}dx = -\int \frac{2\sin 3x \cdot \sin(-x)}{\sin 3x}dx =$$

$$= \int \sin x dx = -\cos x + C$$

Пример 6:

$$\int 3\cos^2 \frac{x}{2}dx = 3\int \frac{1+\cos x}{2}dx = \frac{3}{2}\int dx + \frac{3}{2}\int \cos x dx = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}\sin x + C$$

В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:

если $\int f(x)dx = F(x) + C,$

то $\int f(u)du = F(u) + C,$

где u(x) - произвольная дифференцируемая функция от x. Замена переменной производится с помощью подстановки двух видов:

1) x = φ(t), где t - новая переменная, а φ(t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

Функцию φ (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.

3) t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.

Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(x), v = v(x).

Выразим u . dv : u . dv = d(uv) - v . du.

Проинтегрируем это выражение:

В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:

$$\text{если} \quad \int f(x)dx = F(x) + C,$$
$$\text{то} \quad \int f(u)du = F(u) + C,$$

где u(x) - произвольная дифференцируемая функция от x. Замена переменной производится с помощью подстановки двух видов:

1) x = φ(t), где t - новая переменная, а φ(t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

Функцию φ (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей

формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.

4) t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:

5) **Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.**

6) **Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(х), v = v(x).**

7) **Выразим u . dv :u . dv = d(uv) - v . du.**

8) **Проинтегрируем это выражение:**

9)

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:

$$\text{если} \quad \int f(x)dx = F(x) + C,$$
$$\text{то} \quad \int f(u)du = F(u) + C\,,$$

где u(x) - произвольная дифференцируемая функция от х. Замена переменной

производится с помощью подстановки двух видов:

1) х = φ(t), где t - новая переменная, а φ(t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) \cdot dt$$

Функцию φ (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.

10) t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:

Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.

Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(x), v = v(x).

Выразим u . dv : u . dv = d(uv) - v . du.

Проинтегрируем это выражение:

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Полученный результат есть формула интегрирования по частям. С помощью этой формулы нахождение $\int u\,dv$ сводится к нахождению $\int v\,du$. Применение интеграла целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл проще данного или ему подобен. При этом в качестве и берется функция, которая в результате дифференцирования упрощается.

11)

1)

12)

13) Полученный результат есть формула интегрирования по частям. С помощью этой формулы нахождение $\int u\,dv$ сводится к нахождению $\int v\,du$. Применение интеграла целесообразно в тех случаях, когда последний

интеграл проще данного или ему подобен. При этом в качестве и берется функция, которая в результате дифференцирования упрощается.

$$\int u\,dv = \int d(uv) - \int v\,du$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

14)

$$\int f(g(x)) \cdot g^{1}(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

2. Выполнить следующие упражнения

Вычислить неопределенные интегралы

а) $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx;$

б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$

в) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx;$

г) $\int 3^{2-7x}dx;$

д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$

е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx;$

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx;$

Практическое занятие № 21 Вычисление определенных интегралов.Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

Цели занятия: Научиться вычислять определенные интегралы

Ход занятия:

$$\int f(g(x)) \cdot g^{1}(x)\,dx = \int f(t)\,dt$$

Задача **Задана фигура, ограниченная линиями $y = f(x)$, $f(x) \geq 0$; $x = a$, $x = b$; $y = 0$, называемая криволинейной трапецией.**
Надо найти её площадь.

Изобразим данную фигуру и зададим разбиение интервала [a,b] на n произвольных частей и построим ступенчатую фигуру.

На каждом i-том сегменте выберем точку C_i и найдём $f(C_i)$. Тогда площадь i — го прямоугольника $S_i=f(C_i)*\Delta x_i$

Площадь ступенчатой фигуры равна:

$$S_{ступ} = \sum_{i=0}^{n-1} S_i = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot \Delta X_i$$

Пусть $n \to \infty$, **тогда max** $\Delta x_i \to 0$

Рассмотрим: $\lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{i=0}^{n-1} f(c_i)\cdot\Delta x_i$ **Если этот предел существует, является конечным и равен S, то этот предел называется определённым интегралом в границах от a до b функции f(x)dx. Эта запись имеет вид:**

$$\int_a^b f(x)\,dx = S,\ a\text{—нижняя граница},\ b\text{—верхняя граница}$$

Так как при $n \to \infty$ **S ступенчатой фигуры приближается к S криволинейной трапеции, то геометрически определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции.**

Следует заметить, что вычисление определённого интеграла по определению сложно, до XVII века такие задачи носили частный характер. Сдвиг в этот процесс внесли Ньютон и Лейбниц, указав, что вычисление определённого интеграла сводится к отысканию первообразных и нахождению их приращения на данном промежутке.

Свойства определённого интеграла.

1. Теорема Ньютона - Лейбница.

Если функция y=F(x) есть первообразная для функции y=f(x) на [a,b], то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

(т.е. интеграл равен приращению первообразной на этом интервале).

Эта теорема устанавливает связь между неопределённым и определённым интегралами: неопределённый интеграл - общее выражение первообразной данной функции, а определённый интеграл - число, представляющее собой предел интегральных сумм.

Замечание: последующие теоремы пройдут без доказательств, но они наглядно иллюстрируются геометрическим представлением.

1. $\int_a^b f(x)dx = 0$

(т.к. S криволинейной трапеции не существует).

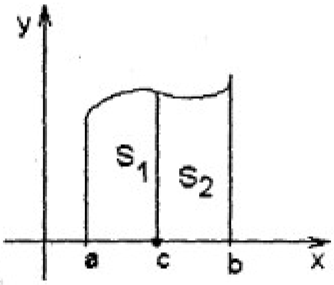
при a<b.

4. $\int\limits_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$

(площади складывают)

5. Если c є[a, b], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$$



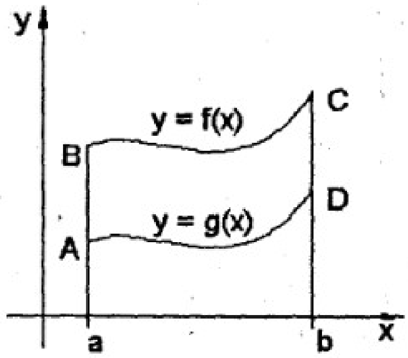
$S_{общ} = S_1 + S_2$

6. Если f(x)>g(x) на [a, b], то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \rangle \int\limits_a^b g(x)dx$$

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$

3. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$, k = const. (площадь увеличивается в k раз)

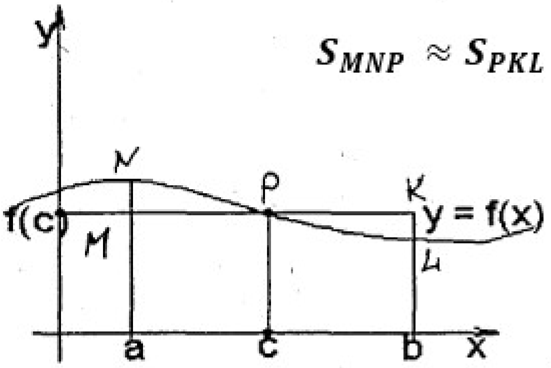


$S_{aBCb} > S_{aADC}$

7. Теорема о среднем.

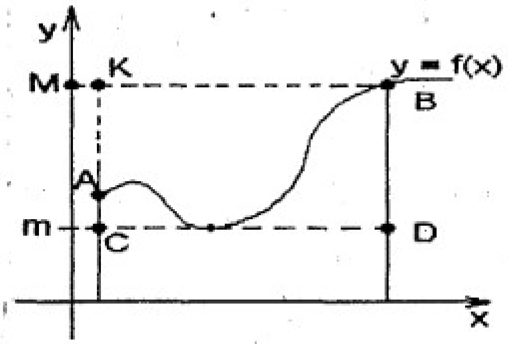
Существует такая точка c ∈[a, b], что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$



8. Если $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$



$S_{aCDB} < S_{aABb} < S_{aKBb}$

1. Ознакомиться с примерами вычисления определенных интегралов и нахождения площадей плоских фигур

Практическое занятие № 23 Решение задач на приложение интегралов

Цели занятия: Научиться решать задачи, используя понятие интеграла

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами задач, при решении которых используется понятие определенного интеграла

определённого интеграла.

Цель:

1. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;

2. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;

3. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.

П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.

Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

1. **Если тело, образовано вращением плоской фигуры,**

ограниченной двумя линиями y = f (x), x = a, x = b, y = 0, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

2. **Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями x = φ(y), y = a, y = b, x = O, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:**

определённого интеграла.

Цель:

4. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;

5. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;

6. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.

П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.

Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

3. **Если тело, образовано вращением плоской фигуры, ограниченной двумя линиями y = f (x), x = a, x = b, y = 0, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

4. **Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями x = φ(y), y = a, y = b, x = O, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:**

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью V=V(t) (м/с), то за время от t_1 до t_2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:

$$S=\int_{t_2}^{t_1} V(t)dt$$

Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ох, то работа, совершаемая силой на отрезке [a, b], вычисляется по формуле:

$$A=\int_{a}^{b} F(x)dx$$

При этом сила определяется законом Гука:
F= kx; где x - величина деформации, k -
коэффициент пружины.

I I I . Давление жидкости.

Сила давления P жидкости плотности p на вертикальную пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

7. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;
8. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;
9. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.
П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.
Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

5. **Если тело, образовано вращением плоской фигуры, ограниченной двумя линиями y = f (x), x = a, x = b, y = 0, вокруг оси Ox, то его объём находят по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$

6. **Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями x = φ(y), y = a, y = b, x = O, вокруг оси Ox, то его объём находят по формуле:**

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy .$$

самостоятельная работа по теме«Производная и интеграл»

Вариант 1

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) y =$2x^3(e^{2x-1}+2)$; y′(0)=? б) y = $\ln\frac{3x^2-4}{2+3x}$; y′(1)=?

2. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции y =x^3+3x^2-9x+4 на интервале [-4;1].

3. Составить уравнение касательной к кривой y = x-2lnx в точке с абсциссой x_0=1.

4. Вычислить интегралы:

$$a)\int_{\frac{1}{3}}^{3}(3x-1)^2\,dx; b)\int_1^3\frac{dx}{3x-2}.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x^2 и y = x+2.

6. Найти силу, необходимую для сжатия пружины на 0,06 м, если сила в 15Н сжимает ее на 30см.

Вариант 2

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) y =$3x\cdot e^{\sin x}$; y′(0)=? б) y = $\frac{1}{3}tg^3 2x-\frac{1}{2}x\cdot tg^2 2x$; y′($\frac{\pi}{8}$)=?

2.Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции $y = 4^x+0,25^{x-1}$ на интервале [0;1].

3.Вращение точки вокруг оси совершается по закону $\varphi(t) = -t^3+12t^2+7t$, где $\varphi(t)$ -угол(рад), t - время(с). Известно, что ускорение а в некоторый момент времени   равно 9рад/с^2. Найти t_0.

4. Вычислить интегралы:

$$a)\int_{-1}^{2}\left(x^2-6x+9\right)dx;b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin xdx}{1+4\cos x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 +4x - 3$ и $y = 0$.

6.Найти давление воды, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющей длину 70см и высоту 30см.

Вариант 3

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) $f(x)=3x+2\arcsin e^x; f(0)=?b)y=\dfrac{3x^4-2x+5}{3x^5}; y(1)=?$

2. Найти произведение максимального и минимального значений функции $y = x^3 -3x$.

3. Найдите абсциссу точки пересечения с осью Ох касательной к графику функции

$y = f(x)$, проходящей через точку (0;10), если $f'(0) = -2$.

4. Вычислить интегралы:

$$a)\int_{-1}^{2}\left(4x^3-2x+1\right)dx;b)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos xdx}{2+3\sin x}$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = -x^2 +4x$ и $y = 0$.

6.Найти давление воды, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющей длину 70см и высоту 30см.

Вариант 4

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) $y=2\sin 3x\cdot\left(x^3+3\right); y'(0)$ =? б) $y=\dfrac{2+3x-x^2}{3x^3+2}; y'(1)=$?

2. Найти сумму максимального и минимального значений функции у = $\frac{1}{3}x^3-4x$.

3.Касательная, проведенная к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x = 1$, имеет вид $4y – 3x + 5 = 0$. Найдите $y'(1)$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^1 (2e^x - 3x^2 + 4)dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)dx$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$ и $y = x + 3$.

6.Скорость прямолинейно движущегося тела равна $v(t) = 4t - t^2$.Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Вариант 5

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) $y = \sin 2x \cdot cos3x; y'\left(\frac{\pi}{6}\right)$=? б) $y = \frac{2x^2 - 5}{e^{1-x}}; y'(0)$ =?

2.Найти значения x, при которых $f'(x) \leq g'(x)$, если $f(x) = x^2 + 3x - \sqrt{2}; g(x) = 4x^2 - 5x$.

3.Написать уравнение касательной к графику функции $y = 2\sin\frac{x}{2}$ в точке с абсциссой

$x_0 = \frac{3\pi}{2}$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x}\right)dx$; б) $\int_0^1 \frac{2dx}{2+3x}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 3$ и $y = x + 5$.

6.Найти силу давления воды на боковые стенки резервуара, имеющего форму куба с ребром, равным 0,8м, если он заполнен водой наполовину.

Вариант 6

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

$a)y = \ln\frac{1-3x}{x^3 + 2x + 1}, y'(1); b)y = 2\sin^3 3x\sqrt{2e^{3x} - 1}, y'(0)$

2. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции

$y = 2x^3 + x^2 - 1$ на интервале [-4;1].

3. Составить уравнение касательной к кривой y = cos3x-2 в точке с абсциссой $x = \frac{\pi}{6}$.

4. Вычислить интегралы:

$a)\int_{-1}^1 (3x-2)^2 dx; b)\int_0^2 \frac{3xdx}{\sqrt{1+2x^2}}$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $e = 4x - x^2$; $y = 4 - x$.

6. Найти силу, необходимую для растяжения пружины на 0,04 м, если сила в 20Н растягивает ее на 80см.

Вариант 7

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

$$a)\, y=\arcsin 3x-2x tg\, 4x^2,\ y'(0)=?\ b)\, y=\frac{\sqrt{\sin 2x}}{x^2},\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right)=?$$

2.Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

$y=\dfrac{1-x}{1+x}$ на интервале(0;1].

3.Найти ускорение материальной точки, движущейся по закону y=tgx; $0\le x<\dfrac{\pi}{2}$ в момент времени, когда ее скорость равна 2.

4. Вычислить интегралы:

$$a)\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\sin x-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx;\ b)\int_1^{e}\frac{2+\ln x}{x}$$

5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=6x-x^2$ и $y=x+4$.

6.Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$ и $y=0$ вокруг оси OX.

Вариант 8

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

$$y=\sqrt{2x^4+4x^2+1},\ y'(-1)=?\ b)\, y=\frac{2e^{3x}-1}{3e^{2x}+2},\ y'(0)=?$$

2. Найти произведение максимального и минимального значений функции

y = $\dfrac{1}{3}x^3+2x^2+3x-1$.

3.Масса неоднородного одномерного стержня является функцией длины

$y=e^x-x-1$. Найти плотность стержня в конечной точке x=1.

4. Вычислить интегралы:

$$a)\int_1^{2}(2x-1)(x+3)\,dx;\ b)\int_0^{-3}\frac{3dx}{\sqrt{25+3x}}$$

5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y=\frac{2}{x};\ y=-\frac{x}{2}-\frac{5}{2}$$

6.Найти путь, пройденный материальной точкой за первые три секунды, если скорость ее движения $v=2t^2+t+3$ м/с.

Вариант 9

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

$$a)\, y=\sqrt[3]{x}\left(e^{3x}-5\right),\, y'(1);\, b)\, y=\frac{\ln\cos 2x}{\cos x},\, y'(0)$$

2.Составить уравнение касательной к кривой $y=\dfrac{8}{4+x^2}$ в точке пересечения с осью ОУ.

3.Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sqrt{\dfrac{1+x}{\ln x}}$ на промежутке $(1;e]$.

4.Вычислить интегралы:

$$a)\, y=\int_1^2\frac{2x^2-3x-1}{x^3}dx;\, b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x dx$$

5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2+2,\, y=1-x^2,\, x=0,\, x=1$$

6.Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$, $y=0$.

Вариант 10

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

$$a)\, y=\sqrt[3]{\ln^2 x+1},\, y'(e)=?;\, b)\, y=\sin^3 x\cos^2 3x,\, y'\left(\frac{\pi}{6}\right)=?$$

2.Точка движется прямолинейно по закону $y(x)=10+20x-5x^2$. Найти скорость и ускорение точки на второй секунде.

3.Найти сумму наибольшего и наименьшего значения функции

$y=\dfrac{x^2-x+1}{-x^2+x+1}$ на промежутке [0;1].

4.Вычислить интегралы:

$$a)\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos x}dx;\, b)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x dx}{1+\cos x}dx$$

5.Найти площадь фигуры , ограниченной линиями

$$y=x^2+2,\, y=2x+2$$

6.Найти путь, пройденный телом за третью секунду, если скорость движения задается уравнением $v=3t^2+4t+1$ м/с.

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью V=V(t) (м/с), то за время от t_1 до t_2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:

$$S=\int_{t_2}^{t_1} V(t)dt$$

Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ox, то работа, совершаемая силой на отрезке [a, b], вычисляется по формуле:

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

При этом сила определяется законом Гука:
F= kx; где x - величина деформации, k - коэффициент пружины.

I V . Давление жидкости.

Сила давления Р жидкости плотности р на вертикальную пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью V=V(t) (м/с), то за время от t_1 до t_2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:

$$S=\int_{t_2}^{t_1} V(t)dt$$

Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ох, то работа, совершаемая силой на отрезке [a, b], вычисляется по формуле:

$$A=\int_a^b F(x)dx$$

При этом сила определяется законом Гука:
F= kx; где x - величина деформации, k - коэффициент пружины.

V . Давление жидкости.

Сила давления P жидкости плотности p на вертикальную пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

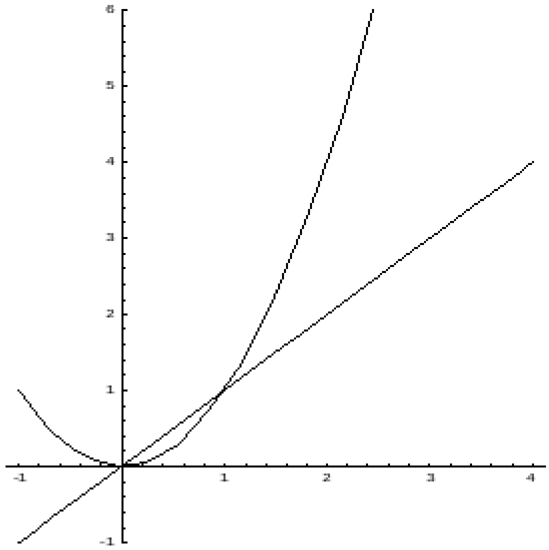
$$P = pg\int_a^b S(x)dx,$$

Где $g = 9,82$ м/с^2, S – площадь пластины, a и b – глубины погружения.

$$P = pg\int_a^b S(x)dx,$$

Где $g = 9,82$ м/с^2, S – площадь пластины, a и b – глубины погружения.

<u>Пример.</u> Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

[redacted](ед^2)

<u>Пример:</u> Найти объем шара радиуса R.

y

R y

-R 0 x R x

В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле [redacted].

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = [redacted].

Получаем объем шара:

[redacted].

<u>Пример:</u> Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.

Q S

x H x

При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

[redacted]

Отсюда получаем функцию площадей сечений: [redacted]

Находим объем пирамиды: [redacted]

2. Выполнить следующие упражнения

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=4-x^2, y=0$; 2) $y^2=2x, x=2$; 3) $y=3-2x-x^2, y=0$;

4) $y=\frac{x}{4}, x=1, y=1$; 5) $t=\ln x, x=e, y=0$.

Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) $y=1-x^2, y=0$ вокруг оси OX;

2) $y=e^x, x=1, x=0, y=0$ вокруг оси OX;

3) $y=\frac{4}{3}, x=1, x=4, y=0$ вокруг оси OX;

4) $y^2=4-x, x=0$ вокруг оси OY;

Практическое занятие № 24 Контрольная работа № 3 Вычисление неопределенных и определенных интегралов

Цели занятия: Проверить уровень подготовки студентов

Ход занятия: Решить предложенные задачи согласно своему варианту

Вариант № 1

1. Вычислите неопределенный интеграл:

1.
   a.
   b.

2. Вычислите определенный интеграл:

1.
    a.
    b.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

$$y=x^2\ ,\ y=2-x^2$$

4. Вычислите несобственный интеграл:

Вариант № 2

1. Вычислите неопределенный интеграл:

1.
    a.
    b.

2. Вычислите определенный интеграл:

1.
    a.
    b.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

$$y^2=9x\ ,\ y=0,\ x=16,\ x=25$$

4. Вычислите несобственный интеграл:

Вариант № 3

1. Вычислите неопределенный интеграл:

1.
    a.
    b.

2. Вычислите определенный интеграл:

1.
    a.
    b.

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

$$y=x^3\ ,\ y=8,\ x=0$$

4. Вычислите несобственный интеграл:

Вариант № 4

1. Вычислите неопределенный интеграл:

1.
   a.
   b.

2. Вычислите определенный интеграл:

1.
   a.
   b.
2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

xy=4 , y=0, x=1, x=4

4. Вычислите несобственный интеграл:

Тема 3.4 Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных

Практическое занятие № 25 Нахождение области определения и вычисление пределов для функции нескольких переменных

Цели занятия:: Научиться находить область определения и вычислять предел функции нескольких действительных переменных

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами нахождения области определения функции нескольких действительных переменных и вычисления пределов данных функций

Пример Найти область определения функции $z=\arccos(x^2+y^2)$.

Функция определена при $x^2+y^2\le 1$ Следовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Пример Вычислить предел функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 2}}\frac{x+y-1}{x^2+xy^2+3}=\frac{0+2-1}{0+0+3}=\frac{1}{3}$$
. .

В этом примере мы воспользовались тем, что предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке.

Пример

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to 0}}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{\substack{xy\to 0\\ x\to 3}}\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x=1\cdot 3=3$$
.

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x\cdot \sin\frac{1}{y}=0$$
.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(x\cdot\frac{y^2}{x^2+y^2}\right)=0$$
.

В примерах 3 и 4 мы воспользовались тем, что *x* есть бесконечно малая функция, функции $\sin\frac{1}{y}$, $\frac{y^2}{x^2+y^2}$ есть ограниченные функции (по модулю не больше единицы), а произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

2. Выполнить следующие упражнения

Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

1. $z=\sqrt{\ln(x+y)}$. **3.** $z=\ln\frac{x^2}{x+y}$.

2. $z=\ln\frac{\cos x}{y}$. **4.** $z=\ln\frac{x-3}{y-5}$.

Практическое занятие № 26 Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных

Цели занятия: Научиться находить частные производные и дифференциалы функции нескольких действительных переменных

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами вычисления частных производных функций нескольких действительных переменных

Пример Найти частные производные функции $z=\arccos\frac{x}{y}\ (y>0).$

Решение. Считая величину y постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\frac{1}{y}=-\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

Считая величину x постоянной, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)=\frac{x}{y}\frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}.$$

<u>Пример </u>Найти частную производную $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$ от функции $z = e^x(\cos y + x\sin y)$.

<u>Решение</u>. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^x(\cos y + \sin y + x\sin y),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y = e^x(\cos y - \sin y + x\cos y),$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)'_x = e^x(2\cos y - \sin y + x\cos y).$$

2. Выполнить следующие упражнения

Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ от функции $z = z(x, y)$.

2.1. $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$. **2.2.** $z = \ln(\sqrt{x} + y^2)$.

2.3. $z = \ln(1+x)\cdot\ln(1+y^2)$. **2.4.** $z = \frac{1}{2}\ln\frac{x}{y}$.

2.5. $z = xy^2\cdot\ln(x^2 + y)$. **2.6.** $z = \ln(x^5 + \ln y)$.

2.7. $z = (1 + \log_y x)^3$. **2.8.** $z = \ln(\sin x + \cos y)$.

2.9. $z = \ln\left|\sqrt[3]{y} - \sin x\right|$. **2.10.** $z = \ln\left(x\sqrt{y} + \frac{y}{2x}\right)$.

Тест по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных»

1. Функция Z = f(x,y) называется
   1. Переменной от нескольких функций
   2. Функцией от нескольких переменных
   3. Функцией от одной переменной
2. Если на множестве *D* задана функция двух переменных Z = f(x,y), то множество D называется
   1. Область определения функции
   2. Область значений функции
   3. Нет правильного ответа
3. Значение функции Z = f(x,y) в точке M(x_0,y_0) называется
   1. Общим значением
   2. Критическим значением
   3. Частным значением
4. Функцию нельзя задать
   1. Аналитически
   2. Графически
   3. Фактически
5. Геометрическим изображением функции Z = f(x,y) в прямоугольной системе координат *Oxyz* (графиком функции) является
   1. Некоторая плоскость
   2. Некоторое пространство

   3. Нет правильного ответа
6. Чтобы найти частную производную от функции Z = f(x,y) по переменной x, нужно найти производную от этой функции по x,
   1. считая, что x является постоянной.
   2. считая, что y является постоянной.
   3. считая, что x и y являются постоянными
7. Производная Z'_X называется
   1. Частной производной функции по переменной y
   2. Частной производной функции по переменной x
   3. Полной производной функции
8. Производная Z'_y называется
   1. Частной производной функции по переменной y
   2. Частной производной функции по переменной x
   3. Полной производной функции
9. Смешанными частными производными называются
   1. Z''_{xx}
   2. Z''_{xy}
   3. Z''_{yy}
10. Смешанные частные производные Z''_{xy}, Z''_{yx}
    1. Равны
    2. Не равны

Тема 3.5 Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных

Практическое занятие № 27 Вычисление двойных интегралов

Цели занятия: Научиться вычислять двойные интегралы

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами вычисления двойных интегралов

<u>Пример.</u> Вычислить интеграл [redacted], если область D ограничена линиями: y = 0, $y = x^2$, x = 2.

y

4

D

0 2 x

[redacted]=

= [redacted]

2. Выполнить следующие упражнения

Изменить порядок интегрирования

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f(x,y)\, dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f(x,y)\, dx$
2. $\int_{-6}^{2} dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)\, dy$

Вычислить двойной интеграл по области D, определяемой условиями.

1. $\iint_D x\, y\, dx\, dy$ D: $\begin{cases} xy = 1 \\ x + y = \frac{5}{2} \end{cases}$
2. $\iint_D (9x^2y^2 + 48x^3y^3)\, dx\, dy$ D: $\begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{x} \\ y = -x^2 \end{cases}$

Практическое занятие № 28 Решение задач на приложения двойных интегралов

Цели занятия: Научиться решать задачи с использованием двойного интеграла

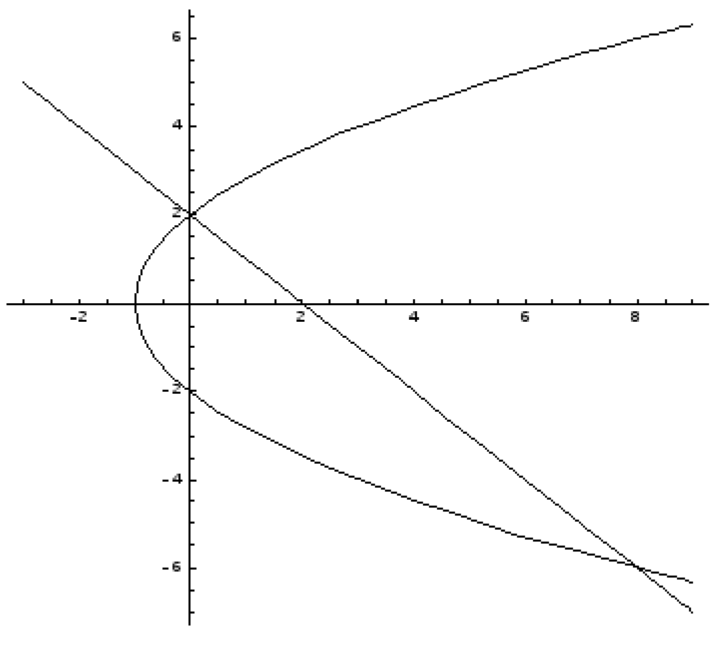
Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами решения задач с использованием двойных интегралов

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x + 4$;

$x + y - 2 = 0$.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от [redacted] до $x = 2 - y$, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

S = [redacted]

Пример. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: $x^2 + y^2 = 1$;

$x + y + z = 3$ и плоскостью XOY.

Пределы интегрирования: по оси OX: [redacted]

по оси OY: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$;

[redacted]

2. Выполнить следующие упражнения

1. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области D,

1. ограниченной кривой $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^4+y^4)$.
2. определяемой уравнениями $\begin{cases} x^2-4x+y^2=0 \\ x^2-8x+y^2=0 \\ y=0, \quad y=\frac{x}{\sqrt{3}} \end{cases}$.

2. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела V, ограниченного поверхностями. Плотность тела V считать равной единице.

1. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2z \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z=4x^2+2y^2+1 \\ x+y-3=0 \\ x=0, \quad y=0, \quad z=0 \end{cases}$

1. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрирования $\int_{-1}^{0} dx \int_{-6x^2}^{-2x+6} f(x,y)\,dy$

2. Вычислить двойной интеграл по области D $\iint_D xy^2\,dx\,dy, \quad D: y=x^2, y=2x$

3. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dy$
4. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиями $x=0;\ y=e^x;\ y=e$
5. Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x-y)\,dxdy$. Область интегрирования *R* ограничена графиками функций $x=0,\ x=1,\ y=x,\ y=2-x^2$.
6. Вычислить интеграл $\iint\limits_R (x+y)\,dxdy$. Область интегрирования *R* ограничена прямыми $x=0,\ y=0,\ x+y=2$.

Найти интеграл $\iint\limits_R x^2 y\,dxdy$, где область *R* представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями

Тема 3.6 Обыкновенные дифференциальные уравнения

Практическое занятие № 29-30 Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными. Решение однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Цели занятия: Научиться решать дифференциальные уравнения 1-го порядка

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами решения дифференциальных уравнений 1-го порядка

Пример. Решить дифференциальное уравнение $y' - y = e^x$

Выполним замену $y = uv$, тогда производная равна: $y' = u'v + uv'$.

Подставляем $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение $y' - y = e^x$:

получаем $u'v + uv' - uv = e^x$.

Сгруппируем члены в левой части и вынесем за скобки, например V, получим $u'v + u(v' - v) = e^x$. Выражение в скобках приравняем к нулю: $v' - v = 0$.

Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными, решаем его.

$v' - v = 0$

$\frac{dv}{dx} = v$

$\int \frac{dv}{v} = \int dx$

$\ln |v| = x$

$v = e^x$

Функция v найдена. Обратите внимание, что константу C на данном этапе мы <u>не приписываем</u>.

Далее подставляем найденную функцию $v = e^x$ в оставшуюся часть уравнения $u'v = e^x$:

$u' \cdot e^x = e^x$

$u' = 1$

$\frac{du}{dx} = 1$

$u = \int dx = x + C$

Функция u найдена. А вот здесь уже добавляем константу C.

Вспоминаем, с чего всё начиналось: $y = uv$.

Обе функции найдены:

$v = e^x$

$u = x + C$

Записываем общее решение:

$y = uv = (x + C) \cdot e^x$, где $C = const$

2. Выполнить следующие упражнения

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

1. $4x\,dx - 3y\,dy = 3x^2 y\,dy - 2xy^2\,dx$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

2. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

1. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xy\,dx = 0$
2. $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

3. Найти решение задачи Коши

1. $y' - \frac{y}{x} = x^2,\ y(1) = 0$
2. $y' - y\,\mathrm{ctg}\,x = 2x\sin x,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$

4. Решить дифференциальные уравнения:

1. $xy' = y$

2. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = -2y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 2$
3. $y' + 2xy = xe^{-x^2}$
4. $y' + ytgx = \dfrac{1}{\cos x}$
5. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' + \dfrac{y}{x} - 2e^{x^2} = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = e$
6. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения $x^2 y' = 2xy + 3$, $y(1) = -1$

Практическое занятие № 31-32 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение степеней

Цели занятия: Научиться решать линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка

<u>Пример.</u> Решить уравнение [redacted].

Составим характеристическое уравнение: [redacted]

[redacted]

Общее решение имеет вид: [redacted]

<u>Пример.</u> Решить уравнение [redacted]

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция [redacted]

[redacted]

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

[redacted]

Общее решение имеет вид: [redacted]

[redacted]

Окончательно: [redacted]

<u>Пример.</u> Решить уравнение [redacted]

Характеристическое уравнение: [redacted]

Общее решение: [redacted]

<u>Пример.</u> Решить уравнение [redacted]

Характеристическое уравнение: [redacted]

Общее решени[redacted]е:

<u>Пример.</u> Решить уравнение [redacted].

Решим соответствующее однородное уравнение: [redacted]

[redacted]

[redacted]

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

[redacted]

Частное решение ищем в виде: [redacted], где [redacted]

Т.е. [redacted]

Теперь определим неизвестные коэффициенты *A* и *B*.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

[redacted]

Итого, частное решение: [redacted]

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

[redacted]

2. Выполнить следующие упражнения

Решить дифференциальные уравнения

1. $y''+3y'+2y=0,\ y(0)=2,\quad y'(0)=-3$;
2. $y'''-y''+y'-y=x+5$;
3. $y''-y'+2y=e^{x}(x^{2}-1)$;
4. $y''+2y'=10e^{x}(\sin x+\cos x)$

Практическое занятие № 33 Контрольная работа № 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений

Цели занятия: Проверить умение студентов решать дифференциальные уравнения

Ход занятия: Решить предложенные задачи согласно своему варианту.

Вариант № 1

1. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$(2x+1)dy+y^2dx=0 \quad y(4)=1$$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$xy' - y=x^3$$

3. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y''-2y'-3y=0 \quad y(0)=1,\ y'(0)=1$$

4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: $y''-y'-6y=2$

Вариант № 2

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$e^y(x^2+1)dy-2x(1+e^y)dx=0$$

2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$xy' + y=3 \quad y(1)=0$$

3. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y''-4y'+3y=0 \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: $y''-2y'=2e^x$

Вариант № 3

1. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$(1-x^2)dy+xydx=0 \quad y(0)=4$$

2. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y'=2x-2xy$$

3. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y''+2y'+y=0 \quad y(0)=1,\ y'(0)=0$$

4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: *y″-y′=4+x*

Вариант № 4

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

$$xydx+(x+1)dy=0$$

2. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$xy' - y=-x \quad y(1)=0$$

3. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

$$y''+2y'-3y=0 \quad y(0)=1,\ y'(0)=1$$

4. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: $y''-2y'-3y=e^{4x}$

Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ определяет на плоскости так называемое поле направлений, т.е. в каждой точке плоскости, в которой существует функция f(x,y), задает направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Пусть требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0)=y_0$. Разделим отрезок $[x_0, X]$ на n равных частей и положим $h = \frac{X - x_0}{n}; h -$ шаг изменения аргумента. Допустим, что внутри элементарного промежутка от x_0 до x_0+h функция y′ сохраняет постоянное значение $f(x_0,y_0)$. Тогда $y_1 - y_0 \approx h \cdot f(x_0, y_0)$.где y_1 - значение искомой функции , соответствующее значению $x_1 = x_0 + h$. Из этого получаем $y_1 \approx y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$.
Повторяя эту операцию , получим последовательные значения функции:
$y_2 \approx y_1 + h \cdot f(x_1, y_1); y_3 \approx y_2 + h \cdot f(x_2, y_2); ...; y_{k+1} \approx y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$.

Таким образом , можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами $M_k(x_k, y_k)$, где $x_{k+1} = x_k + \Delta x_k; y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k)$.

Этот метод называется методом ломаных Эйлера, или просто метод Эйлера.

Пример 1

Используя метод Эйлера, найти значение функции y, определяемой дифференциальным уравнением $y' = \frac{y-x}{y+x}$, при начальном условии y(0)=1, шаг h=0,1. Ограничиться нахождением первых четырех значений y.

Найдем последовательные значения аргумента : x_0=0; x_1=0,1; x_2=0,2; x_3=0,3.

Вычислим соответствующие значения искомой функции:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (1-0)/(1+0) = 1,1;$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (1,1-0,1)/(1,1+0,1) = 1,183;$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,183 + 0,1 \cdot (1,183-0,2)/(1,183+0,2) = 1,254;$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,254 + 0,1 \cdot (1,254-0,3)/(1,254+0,3) = 1,315$$

Получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,18	1,25	1,31

Пример 2

Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x + y$, при начальном условии y(0)=1,полагая h=0,1.

Значения аргумента x_0=0; x_1=0,1; x_3=0,2; x_3=0,3.

Найдем соответствующие значения y:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot (0+1) = 1,1;$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot (0,1+1,1) = 1,22;$$

$$y_3 = y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) = 1,22 + 0,1 \cdot (0,2+1,22) = 1,36;$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f(x_3, y_3) = 1,36 + 0,1 \cdot (0,3+1,36) = 1,52.$$

Получаем таблицу:

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,1	1,22	1,36	1,52

Задания для самостоятельного решения:

1. Методом Эйлера найти три значения функции y, определяемой уравнением $y' = 1 + x + y^2$, при начальном условии y(0)=1, полагая h=0,1.

2. Методом Эйлера найти четыре значения функции y, определяемой уравнением $y' = x^2 + y^3$, при начальном условии y(0)=0, полагая h=0,1.

3. Методом Эйлера найти численное решение уравнения $y' = y^2 + \frac{y}{x}$ при начальном условии y(2)=4, полагая h=0,1(четыре значения).

Тест по разделу «Основы математического анализа»

1.

a.

1. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна y'=x- 4

a. 0

b. 2

c. 1

2. .Как называется предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

a. Первый замечательный предел

b. Второй замечательный предел

c. Полезный предел

3. Производная функции y= sin x равна

a. cos x

b. -cos x

c. sin x

4. Производная функции y= cos x равна

a. sin x

b. -sin x

c. cos x

5. Если f(-x)= f(x), то функция f(x)

a. общего вида

b. нечетная

c. четная

6. Если f(-x)= -f(x), то функция f(x)

a. общего вида

b. нечетная

c. четная

7. Если производная функции на некотором интервале положительна, то функция на этом интервале

a. постоянна

b. убывает

c. возрастает

8. Если производная функции на некотором интервале отрицательна, то функция на этом интервале

a. постоянна

b. убывает

c. возрастает

9. Как называется предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

a. Первый замечательный предел

b. Второй замечательный предел

c. Полезный предел

10. Если предел функции при x стремящемся к бесконечности равен некоторому числу b, то прямая y=b является для графика функции

a. вертикальной асимптотой

b. наклонной асимптотой

c. горизонтальной асимптотой

11. Если первая производная функции в некоторой точке x0 равна нулю, то эта точка может являться

a. точкой экстремума

b. точкой перегиба

c. точкой разрыва

12.Чему равна производная от постоянного числа

a. самому числу

b. нулю

c. бесконечности

13. С помощью какой производной можно найти точки перегиба

a. третьей

b. второй

c. первой

14. Как называется функция, производная которой равна данной функции?

a) Подынтегральная функция

b) Первообразная функция

c) Неопределенный интеграл

15. Какое из утверждений верно? Определенный интеграл – это:

a) Функция от x

b) Число

c) Фукнция от f(x)

16. Сколько начальных условий необходимо задать для определения постоянных величин С 1, С2 в общем решении дифференциального уравнения второго порядка?

a) 1

b) 0

c) 2

17. Чем определяется порядок дифференциального уравнения?

a) Высшим порядком производной, входящей в уравнение

b) Максимальной степенью переменной x

c) Количеством переменных величин в правой части

18. Сколько произвольных постоянных величин содержит решение дифференциального уравнения 2-го порядка, если начальные условия не заданы?

a) 0

b) 1

c) 2

19.Вертикальной асимптотой функции y=(x-1)/(x-7) является прямая

a) y = 0

b) x = 7

c) x = 1

20. Интеграл вида $\iint\limits_D f(x, y)dxdy$ называется

a) двойным

b) повторным

c) двоичным

Раздел 4. Основы теории комплексных чисел

Практическое занятие № 34 Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах

Цели занятия: Научиться выполнять действия над комплексными числами

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами выполнения действий над комплексными числами

Пример. Даны два комплексных числа [redacted]. Требуется а) найти значение выражения [redacted] в алгебраической форме, б) для числа [redacted] найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения [redacted]

a. Очевидно, справедливо следующее преобразование:

[redacted]

Далее производим деление двух комплексных чисел:

[redacted]

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

б) Число [redacted] представим в виде [redacted], где

[redacted]

Тогда [redacted].

Для нахождения [redacted] восппльзуемся формулой Муавра.

[redacted]

Если [redacted], то [redacted]

2. Выполнить следующие упражнения

1. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; $-i$; -2; $3 - 2i$; $1 + 2i$; $-1 - i$.

2. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1) $Z_1 = 4 + 5i; Z_2 = 3 - 2i$

2) $Z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{3}i; Z_2 = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$

б) Найдите разность и частное комплексных чисел Z_1 и Z_2, если:

1. $Z_1 = 3 + 4i; \ Z_2 = 0{,}4 - 0{,}2i.$
2. $Z_1 = 1 - 2i; \ Z_2 = 0{,}6.$

3.Найдите мнимую часть Z, если:

1) $Z = (2 - i)^3 \cdot (2 + 11i)$

2. $Z = \frac{2 - 3i}{1 + 4i} + i^6.$
3. $Z = \frac{5 + 2i}{2 - 5i} - \frac{3 - 4i}{4 + 3i} - \frac{1}{i}.$

4.Выполните действия:

1. $i^{17} + i^{18} + i^{19} + i^{20}.$
2. $2i \cdot (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) \cdot (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i).$
3. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}.$
4. $\frac{13+12i}{6i-8} + \frac{(1+2i)^2}{2+i}.$

Практическое занятие № 35 Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно

Цели занятия: Научиться выполнять переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно

Ход занятия:

1. Ознакомиться с примерами перехода комплексных чисел от алгебраической формы к тригонометрической

Заданы комплексные числа: а) $z_1 = -1$; б) $z_2 = 2i$; в) $z_3 = 1 + i$; г) $z_4 = -1 + 2i$; д) $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$; е) $z_6 = 2 - i$.

Представить z_1, z_2, z_3 в тригонометрической, а z_4, z_5, z_6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной площади.

Решение:

а) имеем (см. рис. 1.2) r = 1; j = p, $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ (1.1)

б) имеем (см. рис. 1.2) r = 2; $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

в) имеем $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2},\quad tg\varphi=1$; согласно рис. 1.2 точка z_3 принадлежит первому квадранту, поэтому $\varphi=\frac{\pi}{4}$, так что $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$(1.2);

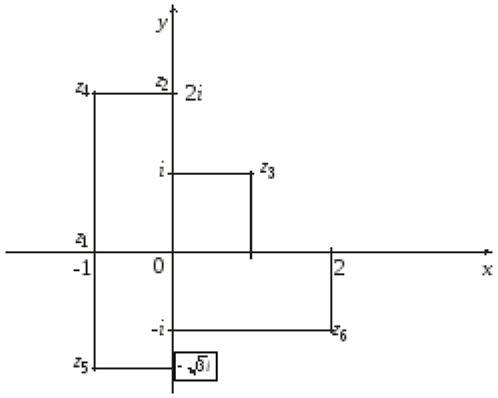


рис. 1.2

г) имеем $r=\sqrt{1+4}=\sqrt{5},\quad \mathrm{tg}\varphi=-2;$ согласно рис. 1.2, точка z_4 принадлежит второму квадранту, поэтому $\varphi=\pi-arctg\,2,$ так что $-1+2i=\sqrt{5}e^{i(\pi-arctg\,2)}$;

д) имеет $r=\sqrt{1+3}=2$, $tg4=-\sqrt{3}$, согласно рис. 1.2, точка z_5 принадлежит третьему квадранту, поэтому $\varphi=\frac{4}{3}\pi$, так что $-1-i\sqrt{3}=e^{\frac{4}{3}\pi}$ (1.3);

е) имеем $r=\sqrt{4+1}=\sqrt{5},\quad \mathrm{tg}\varphi=-\frac{1}{2}$, согласно рис. 1.2, точка z_6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому $\varphi=arctg\left(-\frac{1}{2}\right),\quad 2-i=\sqrt{5}e^{i\left[arctg\left(-\frac{1}{2}\right)\right]}$.

2. Выполнить следующие упражнения

. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) $Z=-\sqrt{3}+i$,

2) $Z=-1$,

3) $Z=-\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}$,

8. Записать комплексное число в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) $Z=\dfrac{i\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$,

2) $Z=\dfrac{1}{\cos\frac{4\pi}{3}-i\sin\frac{4\pi}{3}}$,

3) $Z=\dfrac{1}{(1+i)^2}$,

9. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) $Z=\dfrac{5(\cos 100^\circ + i\sin 100^\circ)i}{3(\cos 40^\circ - i\sin 40^\circ)}$,

2) $Z=\dfrac{\sin\frac{2\pi}{5}+i\left(1-\cos\frac{2\pi}{5}\right)}{i-1}$.

10 . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) $Z=\left(\frac{i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$,

2) $Z=(\cos 31^\circ + i\sin 31^\circ)^{-10}$,

число Z в тригонометрической форме:

1) $Z=(\sqrt{3}-i)^{100}$,

2) $Z=\left(\frac{\sqrt{3}i+1}{i-1}\right)^{6}$,

3) $Z=\frac{(1+i)^{2n+1}}{(1-i)^{2n-1}},\ n\in N$,

4) $Z=(\operatorname{tg} 2-i)^{4}$,

Тест по разделу «Основы теории комплексных чисел»

1. Что представляет собой мнимая единица ?

a) корень квадратный из -1

b) -1

c) 1

2. Представить число Z = -3 в виде комплексного числа

a) Z=3i

b) Z=-3+i0

c) Z=-3i

3. Дано комплексное число Z= -3+2i. Найти координаты точки на

плоскости xoy ему соответсвующие

a) (3;2)

b) (-3;2)

c) (-3;-2)

Функциональные ряды.

Выражение вида (1)

$f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, **некоторые функции, определенные на**

$f_1(x), f_2(x), ...f_n(x), ...$

множестве М, называется функциональным рядом.

Множество Ω (Ω⊂M) всех значений x, при которых функциональный ряд (1) сходится (как числовой ряд), называется **областью сходимости** этого ряда.

Функция S(x), x∈Ω является суммой ряда (1), если S(x)=$\lim_{n\to\infty} S_n(x)$, где

$S_n(x)=f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)$.

Если функция S(x), x∈L(L⊆Ω), является суммой ряда (1), то функциональный ряд (1) сходится на множестве L к функции S(x).

Функциональный ряд называется **равномерно сходящимся** на множестве L к функции S(x), если для любого числа ε>0 существует номер N такой, что при n≥N сразу для всех x∈L выполняется неравенство $\left|S(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$.

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.

Если члены функционального ряда (1) удовлетворяют на множестве L неравенствам $\left|f_n(x)\right|\le c_n, n=1,2,...;$ где c_n – члены сходящегося ряда $c_1+c_2+…+c_n+…$, то функциональный ряд сходится на множестве L равномерно.

Функциональные свойства суммы ряда.

Если функция $f_n(x)$ непрерывна на [a;b], а составленный из них ряд $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$ сходится равномерно на этом отрезке к функции f(x), то:

1.Функция f(x) на отрезке [a;b] непрерывна.

2. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+...+\int_a^b f_n(x)\,dx+...$.

Если функции $f_n(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке [a;b], и на этом отрезке:

а) ряд $f_1(x)+f_2(x)+...+f_n(x)+...$ сходится к функции f(x);

б) ряд $f_1'(x)+f_2'(x)+...+f_n'(x)+...$сходится равномерно, то f(x) имеет на [a;b], непрерывную производную и $f'(x)=f'_1(x)+f'_2(x)+...+f'_n(x)+...$.

Степенные ряды.

Функциональный ряд

$$a_0+a_1(x-c)+a_2(x-c)^2+...+a_n(x-c)^n+...=\sum a_n(x-c)^n, \qquad (1)$$

где a_n и c – некоторые числа, называется степенным рядом с центром в точке c.

Числовые ряды.

Выражение $a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$-некоторые числа, называется *числовым рядом.*
Числа $a_1, a_2,\ldots,a_n,\ldots$-*члены ряда.*

Для каждого числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ можно построить последовательность его *частичных сумм S_n*: $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $n=1,2,\ldots$.

Конечный предел S последовательности частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называют *суммой ряда.*

Если S сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то число $r_n=S-S_n$ называют *остатком ряда*. Так как $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$, то при достаточно большом n: $S \approx S_n$.
Числовой ряд называется *сходящимся*, если он имеет сумму, и *расходящимся*, в противном случае.

Виды числовых рядов.

1.Ряды с неотрицательными членами.

2.Знакочередующиеся ряды имеют вид $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$; их члены имеют произвольные знаки..

3.Степенные ряды имеют вид $\sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$; их членами являются степенные функции.

Ряд $c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\ldots+c_n(x-x_0)^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$ называется обобщенным степенным рядом. При одних значениях x ряды сходятся, при других – расходятся.

Основные свойства сходящихся числовых рядов.

1. Сходимость числового ряда не нарушится, если изменить конечное число его членов (сумма изменится).
2. Если члены сходящегося числового ряда умножить на одно и то же число, то его сходимость не нарушится.
3. Два сходящихся ряда $A=a_1+a_2+\ldots a_n$ и $B=b_1+b_2+\ldots+b_n$ можно почленно складывать и вычитать, так что ряд
$(a_1 \pm b_1)+(a_2 \pm b_2)+\ldots+(a_n \pm b_n)+\ldots$ также сходится и его сумма равна $A \pm B$.

4. ***Необходимый признак сходимости.***

   Если числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

   Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ или не существует, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, но выполнение необходимого условия сходимости не обеспечивает сходимость этого ряда.

Самостоятельная работа: «Степенные и функциональные ряды»

Вариант 1

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n = \frac{1}{4n^2+1}; b)a_n = \frac{2^n}{n!}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)2+4+8+16+...; b)\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+4}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}; b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2n}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...; b)1-\frac{1}{5}+\frac{1}{25}-\frac{1}{125}+...$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n!}; b)\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{1}{27}-\frac{1}{81}$$

Вариант 2

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n = \frac{2n+1}{n^2}; b)a_n = \frac{n}{(n+1)2^n}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}+...; b)1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n+1}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n\cdot 2^n}; b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots;b)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1};b)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}+\ldots$$

Вариант 3

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{2n+1}{3^n};b)a_n=\frac{n!}{n+1}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{4}+\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{108}+\ldots;b)\frac{2}{1}+\frac{4}{4}+\frac{6}{9}+\frac{8}{16}+\ldots$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^n}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n}{3n-1};b)1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\ldots$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$$

Вариант 4

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{1}{(2n-1)\cdot 3^{n-1}};b)a_n=\frac{n}{(n^2+1)3^n}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)5+25+125+\ldots;b)1+\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{7^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n+2};b)1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot 5^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2^n}$$

Вариант 5

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{2^n}{n^3+1};b)a_n=\frac{1}{(2n-1)3^n}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots;b)\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{9}+\frac{4}{17}+\ldots$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{5n}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n^2}{n+1};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{n!}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot n}{2n+1};b)\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\ldots$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1};b)1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}+\ldots$$

Вариант 6

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{n!}{2(3n+1)};b)a_n=\frac{2^n}{n^2}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{11}+\frac{1}{20}+...;b)1+\frac{4}{2}+\frac{9}{6}+\frac{16}{24}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+7}{3n-1}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3n+1}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 2n}{n+1};b)1-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{6^3}+...$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{3^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n!$$

Вариант 7

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{3^n}{1+3^{2n}};b)a_n=\frac{5^n}{(n+1)^2}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{12}+\frac{1}{19}+...;b)\frac{1}{2}+\frac{1}{9}+\frac{1}{28}+\frac{1}{65}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n-1}{2n+5}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^{2n-1}\cdot(2n-1)};b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{3n-2}\right)^n$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot n}{n-3};b)1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+...$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-2)!};b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n-1)}{3n}$$

Вариант 8

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n = \frac{1}{n^2+3}; b)a_n = \frac{n^2}{3^n+n^2}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)1+\frac{8}{2}+\frac{27}{16}+\frac{64}{24}+\frac{125}{120}+...;b)\frac{1}{3}+\frac{16}{9}+\frac{81}{27}+\frac{256}{81}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-3n}{(n+4)^2}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!}{n!};b)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n-1}{n+5}\right)^n$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n^2+3)}{\sqrt{n^7+1}};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)!};b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(3n+1)}{n}$$

Вариант 9

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n = \frac{1}{5n^2-1}; b)a_n = \frac{3^n}{(n-2)!}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)7+8+9+10+...;b)\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-2}{n+3}$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{(2n-3)!};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+2}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+...;b)1-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{64}+...$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n-3)!};b)\frac{1}{5}-\frac{1}{25}+\frac{1}{125}-\frac{1}{625}+...$$

Вариант 10

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:

$$a)a_n=\frac{3n+1}{2^n};b)a_n=\frac{n-2}{(n+1)!}$$

2.Найти формулу общего члена ряда:

$$a)\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\frac{1}{81}+...;b)\frac{3}{1}+\frac{6}{4}+\frac{9}{9}+\frac{12}{16}+...$$

3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$$

4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{5^n};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$$

5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n}{2n-1};b)1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+...$$

6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:

$$a)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+1};b)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n\sqrt{n+1}}$$