МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)
ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г. ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге

Методические рекомендации

для изучения учебной дисциплины
ОУДП.01 Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия
для обучающихся I курса СПО
специальности 40.02.01 Право и организация социального обеспечения

Таганрог
2018 г.

Лист согласования

Методические рекомендации учебной дисциплины разработаны на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) по специальности среднего профессионального образования (далее - СПО) 40.02.01 «Право и организация социального обеспечения».

Разработчик(и):

«28» 08 2018 г. С.А. Моторина

Методические рекомендации для выполнения практических занятий рассмотрены и одобрены на заседании цикловой (методической) комиссии «ОГСЭ и ЕН»

Протокол № 1 от «28» 08 2018 г.

Председатель цикловой методической комиссии А.А. Борисова

Рецензенты:

УПФР по г. Таганрогу зам. директор И.Е. Корниенко

Филиал № 19 ГУ РРО ФСС РФ нач. отдела Д.А. Подлесный

СОГЛАСОВАНО:

Зам. директора по УМР
«28» 08 2018 г. Д.И. Стратан

Зав. УМО
«28» 08 2018 г. Т.В. Воловская

Оглавление

Оглавление

Тема 1: Уравнения, неравенства, системы уравнений.

1. Уравнения: основные понятия, равносильность уравнений.

Равенство, содержащее неизвестное, обозначенное буквой, называется уравнением.

Решить уравнения - найти те значения неизвестного, которые при подстановке обращают его в верное равенство, при которых уравнение имеет смысл.

Два уравнения называются ***равносильными,*** если решение одного уравнения является решением другого уравнения и наоборот.

Теоремы о равносильности уравнений.

1.Если к обеим частям уравнения прибавить или вычесть одно и то же число или многочлен, то получим уравнение, равносильное данному.

2.Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получим уравнение, равносильное данному.

2. Повторение: линейные, квадратные уравнения и неравенства.

Линейные уравнением называется уравнение вида: ax+b=0, где a и b - действительные числа.

Решить уравнение:

1. $2\frac{1}{3}x-3\frac{1}{2}x=3\frac{1}{5}x-4\frac{2}{3}x-9$;

2. $\frac{4-x}{x-3}=5+\frac{1}{x-3}$;

3. $6x-(x+3)(x-3)=2x+13-(x-2)^2$;

4. $7-2x-\frac{1-3x}{7}=2-\frac{2x-1}{3}$

5. $\frac{x+17}{5}-\frac{3x-7}{4}=-2$

6. $\frac{3x-7}{4}-\frac{9x+11}{8}=\frac{3-x}{2}$

Квадратным уравнением называется уравнение вида: $\boxed{ax^2+bx+c=0}$

где *a,b,c* - некоторые числа, причём $a\neq 0$

Виды квадратных уравнений:

$$\left.\begin{matrix} ax^2+c=0; \\ ax^2+bx=0; \end{matrix}\right\}$$ - неполное квадратное уравнение.

когда *a=1,* $\boxed{x^2+px+q=0}$ - приведённое квадратное уравнение

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$; - решение полного уравнения

$x_{1,2}=\frac{-p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$; - решение приведённого квадратного уравнения.

Выражение вида b^2-4ac называется дискриминантом.

Если D<0 – действительных корней нет.

Если D=0 - один действительный корень.

Если D>0 - два действительных корня.

Теорема Виета (свойство корней):

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=q \end{matrix}\right\}$$ для приведённого квадратного уравнения: $x^2+px+q=0$

$$\left.\begin{matrix} x_1+x_2=-\frac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a} \end{matrix}\right\}$$ для полного квадратного уравнения: $ax^2+bx+c=0$

Разложение квадратного трёхчлена на множители:

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Решить уравнения и разложить на множители (№2,6,7,8).

1. $4x^2+6x=9x^2-14x$;

8. $-3x^2+11x-6=0$;

2. $\frac{4}{25}x^2 = 6\frac{1}{4}$;

3. $2\frac{1}{4} = \frac{2}{9}x^2 + 2\frac{1}{8}$;

4. $\frac{4x^2-1}{3} - \frac{3x^2+8}{5} = 1$;

5. $\frac{5x^2-48}{8} - \frac{33-2x^2}{6} = 3\frac{5}{6}$;

6. $5x^2+8x+3=0$;

7. $3x^2+5x-2=0$;

9. $\frac{x^2}{6} - \frac{3x-10}{4} = \frac{2x}{3}$;

10. $\frac{x^2-11}{12} - \frac{2x+3}{6} = \frac{x-3}{4}$;

11. $3 - \frac{x(x+4)}{2} = \frac{5x-4}{6} - \frac{7x}{4}$;

12. $\frac{(x-11)^2}{10} - \frac{(6x-1)^2}{5} = 7 - \frac{7x-3}{2}$;

13. $\frac{8-x}{x} - \frac{x-5}{3} = 0$;

14. $\frac{6+x}{x} - \frac{11-x}{5} = 1$.

Решение неравенств:

Неравенства 1-ой степени (линейные): *ax+b>0 (ax+b<0)*;

Неравенства 2-ой степени (квадратичные): $ax^2+bx+c \geq 0 (\leq 0)$

Решить системы линейных неравенств:

1. $\begin{cases} \frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \\ 2-x > 2x-8 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} \frac{x}{8} - \frac{5x-4}{12} < \frac{x-2}{6} - \frac{x+1}{3} - \frac{3x}{4} + 6 \\ x < \frac{5x-14}{25} - \frac{3x-5}{20} - 9\frac{3}{4} \end{cases}$.

Решить квадратные неравенства методом интервалов:

1. $3x^2+2x-1>0$;

2. $x^2-4x+4 \leq 0$;

3. $-5+4x-3x^2<0$;

4. $5-(x+4)(x+5) \leq -5$;

5. $4x < 2 - x(x-5)$;

6. $3{,}5-2(x+2)^2 \geq -2x$;

7. $\frac{x-3}{x+5} > 0$;

8. $\frac{3-6x}{4+x} \leq 6$;

9. $2 - \frac{x+4}{2x-6} > 0$;

10. $\frac{x^2-2x-3}{x^2+2x+8} < 0$.

Решить самостоятельно:

1. $\frac{2x+1}{5} - \frac{2-x}{3} = 2$;

2. $\frac{y+6}{2} - \frac{5-4y}{3} = \frac{8-y}{6}$;

3. $\frac{4x-51}{3} - \frac{17-3x}{4} = \frac{x+5}{2}$;

4. $x^2 - \frac{7-2x}{4} = 0{,}2$;

5. $\frac{x+1}{5} - \frac{(x-1)(x-2)}{15} = \frac{x}{3}$;

6. $\frac{12-x^2}{4} - \frac{(x-3)^2}{12} = \frac{x}{3}$;

9. $x+2 > \frac{2x-8}{6} - \frac{18-4x}{3}$;

10. $\frac{2-x}{4} + 9\frac{2}{3} > x$

11. $2(x^2+2) - x(x+5) \leq 0$;

12. $6(x+6)-(x+4)(x+6)<0$;

13. $4 - \frac{5-2x}{4+2x} \geq 0$;

14. $\begin{cases} x^2-2x-3>0 \\ x^2-11x+28 \geq 0 \end{cases}$;

7. $3x-\frac{3+2x}{4}<-2x;$

8. $7x-\frac{1}{2}(3x-1)\geq\frac{x}{5}-10{,}1;$

15. $\begin{cases}\frac{3}{4}x+\frac{7}{8}<\frac{1}{4}x+\frac{5}{2}\\ \frac{x+1}{4}-\frac{2x-1}{3}<2\end{cases}.$

3. Иррациональные уравнения.

Уравнение, содержащее неизвестное под знаком радикала, называют иррациональным уравнением.

В элементарной математике иррациональные уравнения решаются в множестве действительных чисел. Всякое иррациональное уравнение с помощью элементарных преобразований (умножения, деления, возведения в целую степень обеих частей уравнения) может быть сведено к рациональному алгебраическому уравнению, при этом важно найти ОДЗ уравнения и выполнить проверку найденных корней уравнения.

Равносильны ли уравнения:

1. $3x=x+2$ *и* $(3x)^2=(x+2)^2$;

2. $3x=x+2$ *и* $(3x)^3=(x+2)^3$;

3. $\sqrt{x-2}=4$ *и* $x-2=16$;

4. $\sqrt{3x-2}=x-3$ *и* $3x-2=(x-3)^2$;

Решить уравнения:

1. $\sqrt{x+5}=3$;
2. $\sqrt{5x+1}=\sqrt{2x+10}$;
3. $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{5}$;
4. $\sqrt{2x+1}=1-x$;
5. $\sqrt{x-1}\sqrt{10x}=x+3$;
6. $\sqrt{(2x+1)(3x+1)}=x+1$;
7. $\sqrt{2x+5}\sqrt{10x+5}=2$;
8. $\sqrt{4x-8}-2=\sqrt{3x-2}$;
9. $x+2\sqrt{x}-8=0$;
10. $2x^2\sqrt{2x^2-8}=20$;

4.Показательные уравнения:

Определение: Уравнение, содержащее неизвестное в показателе степени называется показательным.

Основные типы уравнений и методы их решения:

Метод приведения обеих частей уравнения к одному основанию:

а) $2^{3x-8}=16$

$2^{3x-8}=2^4$

$3x-8=4$

$3x=8+4$

$x=4$

б) $3^{8-5x}=\frac{1}{9}$

$3^{8-5x}=3^{-2}$

$8-5x=-2$

$-5x=-2-8$

$x=2$

Метод приведения к линейному виду:

а) $4^{x+2}-3\cdot4^{x-1}=122$

$4^x\cdot4^2-3\cdot4^x\cdot4^{-1}=122$

б) $2^{3x}=5^{-x}$

$8^x=\left(\frac{1}{5}\right)^x$

$4^x\left(16-\frac{3}{4}\right)=122$

$4^x\cdot 15\frac{1}{4}=122$

$4^x=122:15\frac{1}{4}=\frac{122\cdot 4}{61}=8$

$x=\frac{3}{2}$

$\left(\frac{8}{0{,}2}\right)^x=1$

$x=0$

Метод замены переменной:

а) $2\cdot 9^x-3^{x+1}-2=0$

$3^x=t$

$2\cdot t^2-3\cdot t-2=0$

$t_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2(-2)}}{4}=\frac{3\pm 5}{4}$

$t_1=2$ $\qquad t_2=-\frac{1}{2}$ (не является решением)

Другие методы:

а) $3^x=2$

$3^x=2$

$\lg(3^x)=\lg 2$

$x\lg 3=\lg 2\Rightarrow x=\frac{\lg 2}{\lg 3}$

Решить уравнения:

1. $3^x=7^{\frac{x}{2}}$
2. $5^{x-3}=2^{3-x}$
3. $2^{x+2}+3\cdot 2^{x+1}+7\cdot 2^x=68$
4. $4^{2x-1}+4^{2x-2}-4^{2x-4}=316$
5. $5^{4x}+3\cdot 5^{4x-2}=140$
6. $\left(\frac{1}{9}\right)^x-10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x+9=0$
7. $10\cdot 25^x+18\cdot 5^x-4=0$
8. $21\cdot 3^x-3^{x+4}=5^{x+2}-5^{x+3}$
9. $3^{x-\frac{1}{2}}-2^{2x}=4^{x-\frac{1}{2}}-3^{x+\frac{1}{2}}$

Домашнее задание:

1. $5^{3+e}-3^{4+y}=5^{2+y}-7\cdot 3^{1+y}$
2. $10^x+10^{x-1}=0{,}11$
3. $2^{x^2-6x-2{,}5}=16\sqrt{2}$
4. $2^{2+x}-2^{2-x}=6$

5. Логарифмические уравнения.

Определение**:** Уравнения, содержащие неизвестное под знаком логарифма называются логарифмическими.

При решении логарифмического уравнения важно знать область определения уравнения, либо сделать проверку.

Основные типы логарифмических уравнений и методы их решения:

5.1. Метод приведения обеих частей уравнения к логарифму по одному основанию:

$\log_7(4x-3)=2$

О.Д.З. $4x-3>0$

$x>\frac{3}{4}$

Решение:

$\log_7(4x-3)=\log_7 49$

$4x-3=49$

$4x=52$

$x=13\quad\in О.Д.З.$

Ответ: $x=13$

$\log_{(3-x)}(x^2-2x+5)=2$

О.Д.З. $\begin{cases}x^2-2x+5>0\\ 3-x>0\end{cases}$

$\begin{cases}x\in(-\infty;+\infty)\\ x<3\end{cases}$

Решение:

$(3-x)^2=x^2-2x+5$

$9-6x+x^2=x^2-2x+5$

$-4x=-4$

$x=1\quad\in О.Д.З.$

Ответ: $x=1$

5.2. Применение свойств логарифмов:

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=1-\lg 5$$

О.Д.З. $\begin{cases} x-2>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>2 \\ x>3 \end{cases} \Rightarrow x>3$

Решение:

$$\lg(x-2)+\lg(x-3)=\lg 10-\lg 5$$

$$\lg(x-2)(x-3)=\lg\frac{10}{5}$$

$$(x-2)(x-3)=2$$

$x^2-5+6=2 \qquad x_1=1$

$x^2-5x+4=0 \qquad x_2=4$

x_1 – не является решением, т.к. 1<3

Ответ: $x=4$

5.3. Метод замены переменной:

$$\frac{1}{5+\lg x}+\frac{2}{1+\lg x}=1$$

О.Д.З. $\begin{cases} x>0 \\ 5-\lg x\neq 0 \\ 1+\lg x\neq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ \lg x\neq 5 \\ \lg x\neq -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x\neq 10^5 \\ x\neq 10^{-1} \end{cases}$

Решение: $\lg x=t$ тогда

$$\frac{1}{5-t}+\frac{2}{1+t}=1$$

$$1+t+10-2t=1(5-t^2+4t)$$

$$t^2-5t+6=0$$

$$t_1=2 \quad t_2=3$$

$\left.\begin{matrix} \lg x=2\Rightarrow x=10^2=100 \\ \lg x=3\Rightarrow x=10^3=1000 \end{matrix}\right\}$ являются решениями данного уравнения

Ответ: $x_1=100, x_2=1000$

5.4. Применение формул перехода логарифма к другому основанию:

Формула перехода от старого основания логарифма к новому основанию имеет вид:

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Решить: $\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x=6$ О.Д.З. $x>0$

Решение: $\log_3 x+\dfrac{\log_3 x}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\log_3 x}{-1}=6 \qquad \log_3 x(1+2-1)=6\Rightarrow \log_3 x=3 \qquad$ Ответ: $x=27$

Решить уравнения:

1. $\log_{0,2}(x-1)=4$
2. $\log_3(2x+5)=-1$
3. $\lg(x+5)-\lg(x-2)=2$
4. $1+\log_2(3x+1)-\log_2(x^2-5)=0$
5. $\log_2(4-x)+\log_2(1-2x)=2\log_2 3$
6. $(3-\lg x+\lg 3)\lg x=2\lg 3+2$
7. $\log_3 x+\log_x 3=2{,}5$
8. $4\lg^2 x-2=\lg x^2$
9. $\log_2(3^{2x-2}+7)=2+\log_2(3^{x-1}+1)$
10. $\log_3 x-\log_3(x+2)+\log_3(x^2-4)=1$

Проверь себя:

а) $\log_{\frac{1}{2}}(21-5x)=-3$ в) $2\log_{\pi}(x-1)+\log_{\pi}(x-30)^2=4$

б) $\lg(x^2-75)-\lg(x-4)=2$ г) $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x$

Домашнее задание:

1. $\log_2(9-2^x)=3-x$
2. $\lg(x+6)-\frac{1}{2}\lg(2x-3)=2-\lg 25$
3. $\log_{x^2}16-\log_{\sqrt{x}}7=2$
4. $\lg(y-3)+\lg y=1$

Задания для внеаудиторной самостоятельной работы.

Повторение понятий степени, корня, логарифма:

1. Вычислить.

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}-81^{\frac{1}{2}}\cdot 125^{-\frac{1}{3}}.$ 2. $216-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{-2}-5^{-1}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

3. $49^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{7}\right)^{-2}+2^{-1}\cdot(-2)^{-2}.$ 4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 16^{\frac{1}{2}}-2^{-1}\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{3}}.$

5. $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 7^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-2}\right):49^{-\frac{1}{2}}.$ 6. $\frac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}.$

7. $\frac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}.$ 8. $\frac{25^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{-1}\cdot 125^{\frac{1}{3}}-9^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}}-216^{-\frac{1}{3}}}.$

2. Вычислить.

1. а) $10^{3\lg 2-1}$; б) $\log_{16}0{,}5$; в) $\frac{\log_2 64}{\log_2\sqrt{16}}$. 2. а) $100^{\lg\sqrt{5}}$; б) $\log_{64}\frac{1}{16}$; в) $10^{2-3\lg 5}$.

3. а) $5^{-6\log_5 2}$; б) $\log_{\frac{8}{27}}\frac{81}{16}$; в) $\frac{\lg 4}{\lg 64-\lg 8}$. 4. а) $36^{0{,}5-\log_6\sqrt{5}}$; б) $\log_{0{,}09}\sqrt{0{,}027}$; в) $\frac{\lg 81}{\lg 9}$.

5. а) $49^{\frac{1}{2}+\log_7 2}$; б) $\log_4 8^7$; в) $\frac{\lg 4}{\lg 16-\lg 8}$. 6. а) $10^{3-2\lg 5}$; б) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[3]{4}$; в) $2\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}+1)-\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}+2)$.

3. Прологарифмировать выражение.

1. $x=\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{1000}}\right)^7$. 2. $x=\left(\sqrt[3]{\frac{10}{a}}\right)^5$. 3. $x=\frac{10\cdot\lg a}{\lg a^3}$. 4. $x=\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{ab}}}^{-2}\sqrt{\frac{a}{b}}.$

4. Найти x, если:

1. $\lg x=5\lg 2-\lg 2.$ 2. $\lg x=2-\lg 5.$

3. $\lg x=3\lg a+2\lg b-1.$ 4. $\lg x=2-4\lg a+\frac{1}{2}\lg b.$

Решить уравнения:

1) 1. $3^{x^2-17x+63\cdot 5}=27\sqrt{3}$.
2. $3^{2x}-2\cdot 3^{2x-2}-2\cdot 3^{2x-1}=1$.
3. $5^x+125\cdot 5^{-x}=30$.

2) 1. $100^x=0{,}1(10^{x-1})^5$.
2. $3^{2x+1}-3^{2x-1}+3^{2x-2}=225$.
3. $2\cdot 3^{2x}-5\cdot 3^x-1323=0$.

3) 1. $\left(\frac{1}{36}\right)^{-10\sqrt{x}}=2^{5x}\cdot 3^{5x}$.
2. $3^{2x-1}-3^{2x}+3^{2x+3}=237$.
3. $12\cdot 3^{\frac{1}{2x}}-3^{\frac{1}{x}}-27=0$.

4) 1. $\log_{x+2}(2x^2-5x+18)=2$.
2. $\lg(x+4)-\lg(x-3)=\lg 8$.
3. $\log_{x^2}16+\log_{2x}64=3$.

5) 1. $\log_x(3x^2-4x-6)=2$.
2. $\lg(2x-1)+2\lg\sqrt{x-9}=2$.
3. $\log_2 x+\log_8 x=8$.

6) 1. $\log_x\sqrt{5}+\log_x 25\sqrt{5}=3$
2. $\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1$
3. $\begin{cases}\log_5(x+y)=1\\ \log_6 x+\log_6 y=1\end{cases}$

Решить неравенство:

1. $\left(\frac{1}{3}\right)^x<\frac{1}{81}$.
2. $0{,}2^{x^2-7x+12}>1$.
3. $2^{x^2-8x+19}>16$.
4. $(x^2-8x+16)^{x-6}<1$.
5. $\log_2(x-3)<1$.
6. $\lg\frac{x-4}{2-x}>0$.
7. $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.
8. $\log_x(x^2+1)>2$.

6. Тригонометрические уравнения.

6.1.Решение любого тригонометрического уравнения заключается в приведении его к простейшему виду.

Основные простейшие тригонометрические уравнения:

$\sin x=m \quad |m|\le 1 \quad x=(-1)^k\arcsin m+\pi k$

$\cos x=m \quad |m|\le 1 \quad x=\pm\arccos m+2\pi k$

$tgx=m \quad x=arctgm+\pi k$

$ctgx=m \quad x=arcctgm+\pi k$

Основные типы тригонометрических уравнений.

1. Простейшие тригонометрические уравнения:

$2\sin x=1 \qquad \cos 5x=-1 \qquad tg\left(2x-15^0\right)=\sqrt{3}$

2. Уравнения, приводимые к квадратным:

$2\sin^2 x-7\sin x+3=0 \qquad 2\sin^2 x+3\cos x=0$

3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители:

$\sin xtgx+1=\sin x+tgx$

4. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$:

$2\sin x-3\cos x=0 \qquad \sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0 \quad 2\sin^2 x+5\sin x\cos x+\cos^2 x=4$

5. Применение формул тригонометрии, свойств тригонометрических функций:

$\cos 2x=\cos 6x \qquad \cos 2x=\sin^2 x \qquad 2tg^2\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+3tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=0$

6.2.Решить уравнения

1. $\cos(4-2x)=-\frac{1}{2};$

2. $\sqrt{2}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+1=0;$

3. $2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+1=0;$

4. $3+4\sin(2x+1)=0;$

5. $(1+\sqrt{2}\cos x)(1-4\sin x\cdot\cos x)=0;$

6. $tg\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-1;$

7. $2\sin^2 x+\sin x=0;$

8. $6\sin^2 x-12\cos x+7=0;$

9. $8\cos^2 x-12\sin x+7=0;$

10. $2\sin 2x=3\cos 2x;$

11. $4\sin 3x+5\cos 3x=0;$

12. $5\sin x+\cos x=5;$

13. $\cos 4x+\cos 3x=0;$

14. $\sin 3x=\sin 5x;$

15. $\cos^2 3x-\cos 3x\cos 5x=0;$

16. $2\sin^2 x-\sin x\cos x-3\cos^2 x=0;$

17. $\cos^2 x-3\sin x\cos x+1=0;$

18. $19\sin^2 x+60\sin x\cos x+25\cos^2 x=25;$

19. $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0;$

20. $5\sin x tgx-\sin x-5tgx+1=0.$

Самостоятельная работа:

1. $2\sin^2 x-5\cos x+1=0;$
2. $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-3\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0;$
3. $ctg^2 2x-tg\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)-2=0;$
4. $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3;$
5. $2(\cos^2 x-\sin^2 x)=1;$
6. $(\sin x-1)tgx=0;$
7. $2\cos x ctg 3x=ctg 3x;$
8. $\sin 3x+\sin x=0;$
9. $\cos 2x=\cos x;$
10. $\cos 6x+\cos 4x=0;$
11. $\sin x-\sqrt{3}\cos x=0;$
12. $3\sin^2 x-7\sin x\cos x+2\cos^2 x=0;$
13. $4\sin^2 x+2\cos^2 x-3\sin 2x=0;$
14. $4\sin^2 x-2\sin x\cos x=1;$
15. $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\sin^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=2.$
16. $\cos 4x=\cos 3x\cos 7x$
17. $\cos 2x=\sin(45^\circ+x)$
18. $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right);$
19. $\arcsin(x+1)=\frac{\pi}{6};$

22. $\arccos(3x+2)=\frac{2\pi}{3}.$

7. Системы линейных уравнений.

7.1. Системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными называется совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_1x+в_1y=c_1 \\ a_2x+в_2y=c_2 \end{cases} \quad (*)$$

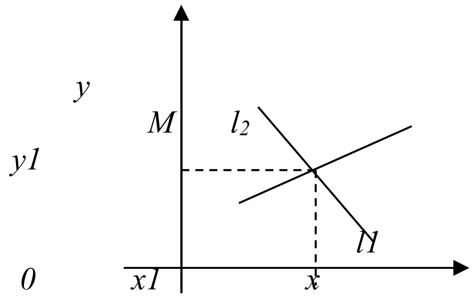
Линейное уравнение с двумя неизвестными ax + by = с имеет бесконечное множество решений; графически- прямая линия.

Решением системы (*) является пара чисел, которая удовлетворяет, как первому, так и второму уравнению системы.

Геометрическая интерпретация решений системы (*)

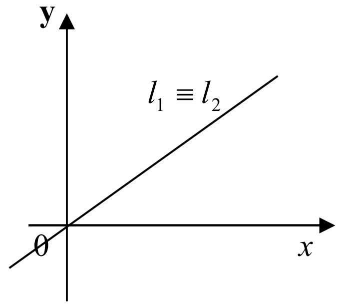
1.Единственное решение

$l_1 x l_2 = M(x_1, y_1)$



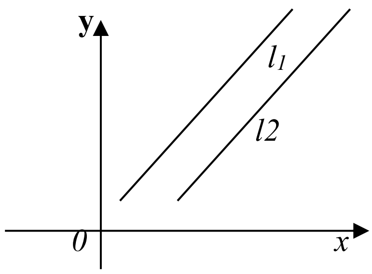
2. Бесчисленное множество решений

$l_1 \equiv l_2$



3. Нет решений

l_1 II l_2



нет решений

Методы решения системы (*)

1. Метод алгебраического сложения. 2. Метод подстановки.
3. Графический метод. 4. Правило Крамера.

7.2. Правило Крамера для решения системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

$$\begin{cases} a_1 x + в_1 y + c_1 \\ a_2 x + в_2 y = c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta \cdot x = \Delta x \\ \Delta \cdot y = \Delta y \end{cases}$$

Определитель – эта таблица, которая составлена из коэффициентов при неизвестных *x, y*:

Главный определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \leftarrow \text{строка}$$

$= a_1b_2 - a_2b_1$

$\downarrow$ столбец

вспомогательные
определители

$$\Delta x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1 \qquad \Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

Правило Крамера
7.3. Правило Крамера для решения системы трех линейных уравнений с тремя

$$1.\Delta \neq 0; \quad x=\frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta} \quad \textit{единственное решение}$$

$$2.\Delta = 0; \quad \Delta x \neq 0; \quad \Delta \neq 0 \quad \textit{нет решений}$$

$$3.\Delta = 0; \quad \Delta x = 0; \quad \Delta y = 0 \quad \textit{бесчисленное множество решений}$$

неизвестными.

Общий вид системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x+в_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+в_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+в_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

Правило вычисления определителя III порядка - разложение по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\underbrace{\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}}_{Алгебр.доп}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=d_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} d_2 & b_2 \\ d_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} d_2 & c_2 \\ d_3 & c_3 \end{vmatrix}-d_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}+c_1\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}=a_1\begin{vmatrix} b_2 & d_2 \\ b_3 & d_3 \end{vmatrix}-b_1\begin{vmatrix} a_2 & d_2 \\ a_3 & d_3 \end{vmatrix}+d_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Правило Крамера

$$1.\Delta \neq 0, \textit{то} \quad x=\frac{\Delta x}{\Delta}; \quad y=\frac{\Delta y}{\Delta}; \quad z=\frac{\Delta z}{\Delta}; \quad \textit{единственное решение.}$$

$$2.\Delta = 0, \quad \Delta x \neq 0; \quad \Delta y \neq 0; \quad \Delta z \neq 0; \quad \textit{решений нет}$$

$$3.\Delta = 0, \quad \Delta x = 0, \quad \Delta y = 0, \quad \Delta z = 0; \quad \textit{бесчисленное множество решений.}$$

Минором элемента определителя III порядка называется определитель II порядка, который получается вычеркиванием строки и столбца, содержащий данный элемент.

Алгебраическим дополнением данного элемента называется его минор, *умноженный на (-1)$^{n+k}$, где n- номер строки, к- номер столбца, содержащий данный элемент.*

Определитель Ш порядка можно вычислить разложением по элементам любой строки, либо столбца.

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} -x+2y=-3 \\ 2x-y=6 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} 3x-2y=1 \\ x+3y=4 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} -3x+2y=4 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$; 4. $\begin{cases} 4x-3y=-1 \\ -2x+4y=3 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ -2x+y=\frac{1}{2} \end{cases}$; 6. $\begin{cases} -3x+2y=-1 \\ 5x-4y=2 \end{cases}$; 7. $\begin{cases} x+2y=-1 \\ 5x-4y=2 \end{cases}$; 8. $\begin{cases} 3x-4y=2 \\ -x+2y=-3 \end{cases}$

9. $\begin{cases} -2x+y=5 \\ 4x-5y=-13 \end{cases}$; 10. $\begin{cases} 3x-y=7 \\ -2x+5y=-22 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} -\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=0 \\ x-5y=7 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=3 \\ -2x+y=-12 \end{cases}$

Решить графически и по правилу Крамера:

1. $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-4y=-3 \end{cases}$; 2. $\begin{cases} -x+3y=4 \\ -2x+6y=-1 \end{cases}$; 3. $\begin{cases} 3x-y=-6 \\ x-\frac{y}{3}=-2 \end{cases}$

Решить системы уравнений:

1. $\begin{cases} 7x-3y+5z=32 \\ 5x+2x+z=11 \\ 2x-y+3z=14 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=20 \\ 3x-2y-5z=6 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} 4x-5(y+1)=1 \\ \frac{5}{12}y-\frac{1}{2}z=-1 \\ \frac{5}{6}x+\frac{1}{3}y-\frac{3}{2}z=-1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y-3z+5x=-2 \\ 3y+4x+3z=16 \\ 2x-3y+z=17 \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_1-2x_2+4x_3=6 \\ 2x_1-x_2+3x_3=11 \\ 4x_1+x_2-5x_3=9 \end{cases}$

Тема 2: Прямые и плоскости в пространстве.

Стереометрия – это раздел геометрии, который изучает геометрические тела в пространстве.

I часть: прямые и плоскости в пространстве.

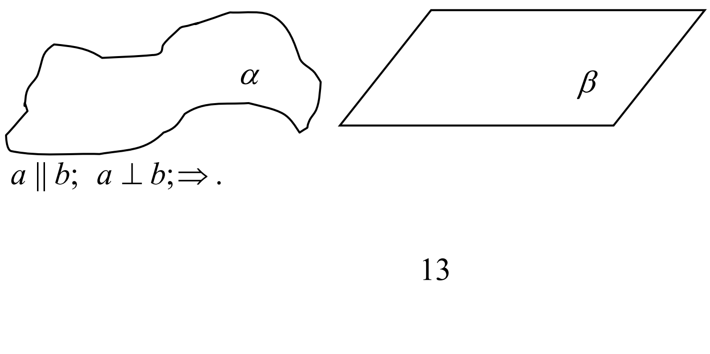
II часть: площадь поверхности и объём геометрических тел.

1.Основные понятия и аксиомы стереометрии.

1. Точка $(\cdot)$ A, B, C, D, E…

2. Прямая /***a***, ***b, c, d, m, n, p***…,AB,BC,…

3. Плоскость



α, β, γ

Обозначения:

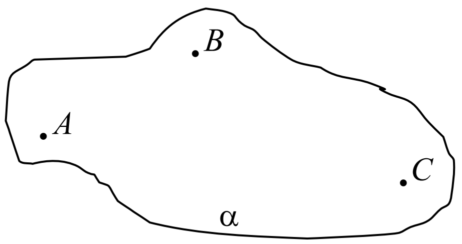
$M \in a$; mxn=0; $a \parallel b$; $a \perp b$;$\Rightarrow$.

Основные аксиомы стереометрии и их следствия.

Аксиома 1: Через любые три точки пространства, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость и при том только одну.

Дано: A, B, C $\notin \boldsymbol{a}$

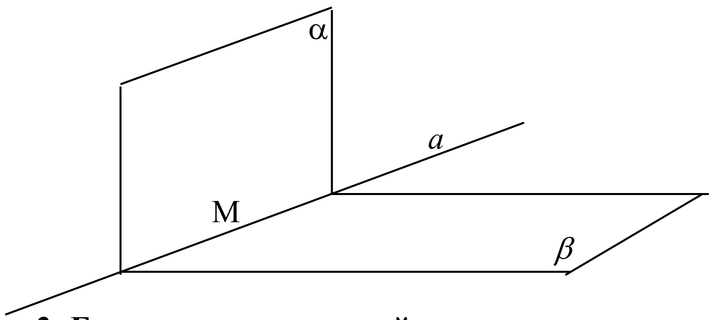
Доказать: A, B, C $\in \alpha$



Аксиома 2: Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.

Дано: M $\in \alpha,\beta$; M$\in$a

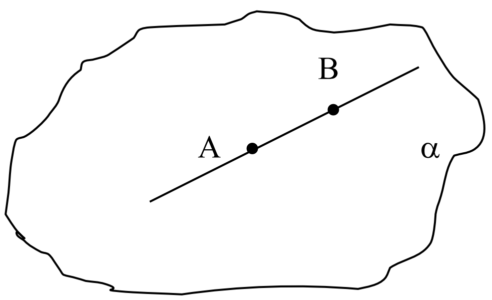
Доказать: α x= $a \in M$



Аксиома 3: Если две точки прямой лежат на плоскости, то и вся прямая лежит на этой плоскости.

Дано: A,B, $\in \alpha$; A,B $\in a$

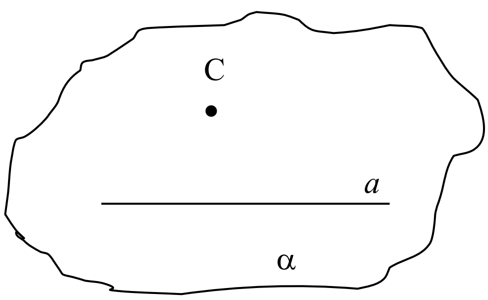
Доказать: $a \in \alpha$



Следствие 1: Через прямую a и точку C вне её можно провести плоскость и притом только одну.

Дано: C$\notin$a

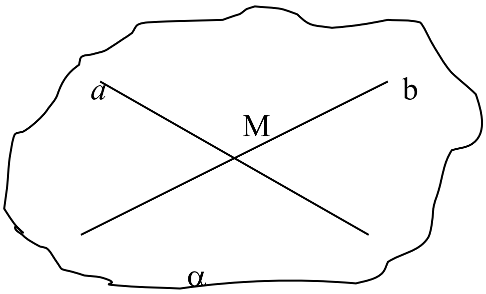
Доказать: $a, C \in \alpha$



Следствие 2: Через две пересекающиеся прямые можно провести плоскость и притом только одну.

Дано: a x $b=M$

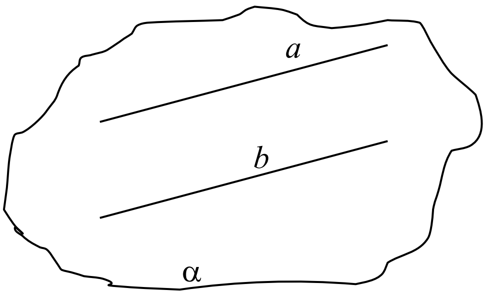
Доказать: $a, b \in \alpha$



Следствие 3: Через две параллельные прямые можно провести плоскость и притом только одну.

Дано: $a \parallel b$

Доказать: $a, b \in \alpha$



2. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве.

2.1. Прямая и плоскость:

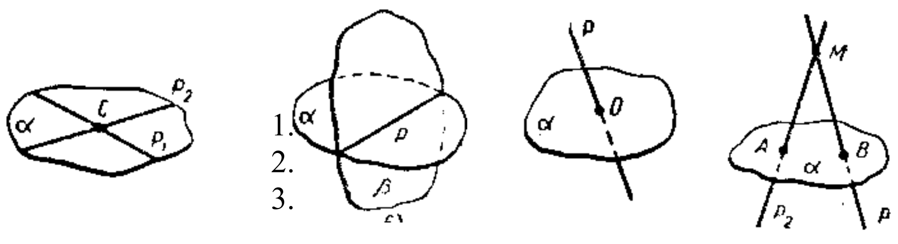
1. Параллельны (нет общих точек)
2. Пересекаются (одна общая точка)
3. Совпадают (бесчисленное множество точек)

2.2. Аналогично расположение плоскостей в пространстве.

2.3. Прямые в пространстве.

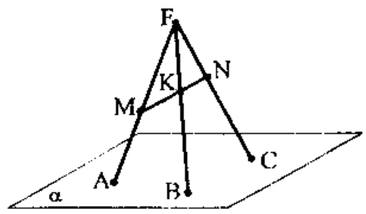
1. Лежат в одной плоскости.
2. Не лежат в одной плоскости (скрещивающиеся прямые.)

Контрольные вопросы по основным понятиям стереометрии

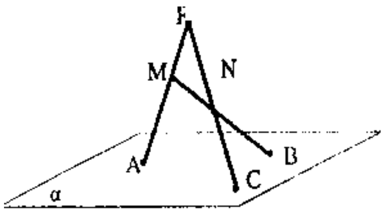


1. Прочитать и кратко записать то, что дано на чертеже.
2. Могут ли прямая и плоскость иметь только одну общую точку?
3. Могут ли прямая и плоскость иметь только две общие точки?
4. Могут ли две плоскости иметь только одну общую точку? а три плоскости?
5. Сколько плоскостей можно провести через: а) одну точку; б) две точки; в) три точки, не лежащие на одной прямой?
6. Четыре точки не принадлежат одной плоскости. Могут ли три из этих точек принадлежать одной прямой?
7. Сколько определенных плоскостей можно провести через 4 точки, не принадлежащие одной плоскости?

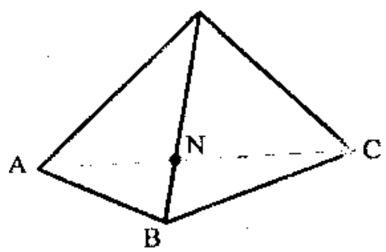
Задача 1
Прямая пересекает две стороны треугольника. Лежит ли она в плоскости этого треугольника? Ответ обоснуйте,
Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.



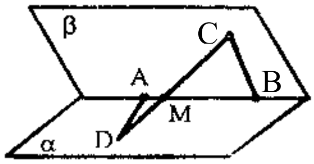
Задача 2
Три вершины параллелограмма лежат в плоскости. Принадлежит ли этой плоскости четвёртая вершина параллелограмма? Ответ обоснуйте.
Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.



Задача 3
Хорда окружности принадлежит плоскости. Верно ли утверждение, что и вся окружность лежит в этой плоскости? Ответ обоснуйте.
Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.



Задача 4
Две пересекающиеся хорды окружности принадлежат плоскости. Верно ли утверждение, что и вся окружность лежит в этой плоскости? Ответ обоснуйте.

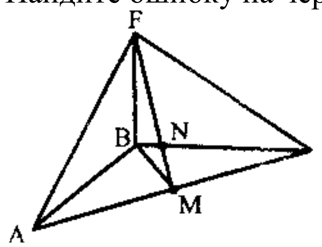


Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.

Задача 5

Около треугольника описана окружность. Лежит ли центр этой окружности в плоскости треугольника? Ответ обоснуйте.

Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.

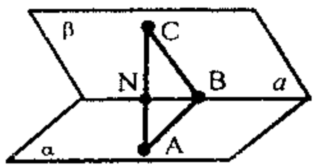


Задача 6

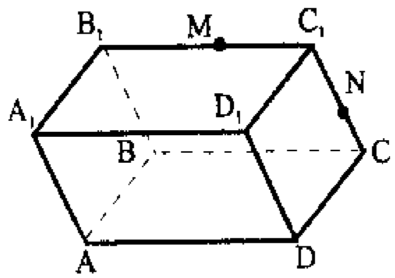
В треугольник вписана окружность. Лежит ли центр этой окружности в плоскости треугольника?

Ответ обоснуйте.

Найдите ошибку на чертеже. Дайте объяснение.



Задача 7



$ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелепипед.

1. Назовите:

а) точку пересечения прямой AB и плоскости (B_1C_1C);

б) линию пересечения плоскостей (AA_1D_1) и (DCC_1).

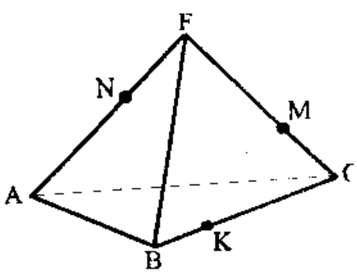
2. Постройте:

а) точку пересечения прямой MN и прямой BB_1;

б) точку пересечения прямой MN и плоскости (ABC);

в) линию пересечения плоскостей (AMN) и (ABC).

Задача 8



FABC - пирамида.

1. Назовите:

а) точку пересечения прямой FM и (ABC);

б) линию пересечения плоскостей (NFM) и (ABC).

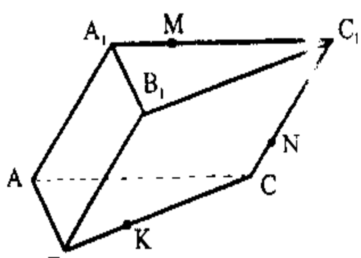
2. Постройте:

а) точку пересечения прямой MN и прямой AC;

б) точку пересечения прямой MK и плоскости (ABF);

в) линию пересечения плоскостей (ABF) и (MNK).

Задача 9



$ABCA_1B_1C_1$ – призма.

1.Назовите:

а) точку пересечения прямой KC_1 и плоскости (ABC);

б) линию пересечения плоскостей (ABB_1) и (ACC_1).

2. Постройте:

а) точку пересечения прямой MN и прямой AC;

б) точку пересечения прямой KN и плоскости (ABB_1);

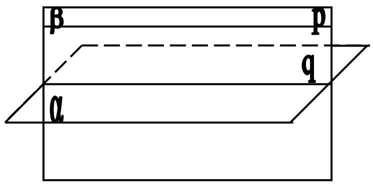
в) линию пересечения плоскостей (ABB_1) и (MNK).

3.Параллельность прямой и плоскости. Определение, признак, свойства.

Определение: Прямая называется параллельной плоскости, если они не имеют ни одной общей точки.

Признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема: Если прямая параллельна прямой, лежащей на плоскости, то она параллельна и самой этой плоскости.



Дано: $q \in \alpha$, $p \parallel q$

Доказать: $p \parallel \alpha$

Доказательство: Методом от противного

Предположим, прямая p пересекает плоскость α, тогда она пересекла бы и прямую *q,* но это невозможно, так как *p*||q, следовательно, прямая *p* не пересекается с плоскостью *α,* то есть p||α.

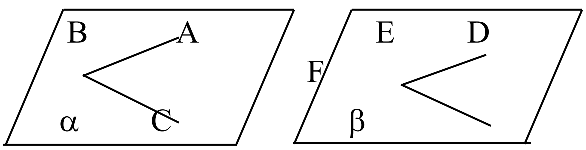
Свойства: Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

4. Параллельные плоскости. Определение, признак, свойства.

Определение*:* Две плоскости называются параллельными, если они не имеют ни одной общей точки.

Признак параллельности плоскостей.

Теорема: Если две пересекающиеся прямые, лежащие на одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, лежащим на другой плоскости, то эти плоскости параллельны.



Дано: ABxBC $\in \alpha$

DExEF $\in \beta$

$AB \parallel DE$; $BC \parallel EF$

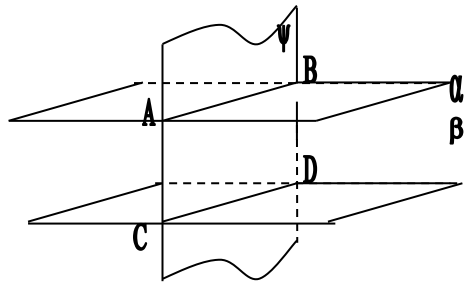
Доказать: $\alpha \parallel \beta$

Доказательство:

Так как прямые AB и BC соответственно параллельны прямым DE и EF, лежащим в плоскости β , то AB || β и BC || β . Если бы плоскости α и β имели общую точку M, то они пересекались бы по прямой MN, проходящей через эту точку (если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.). В силу теоремы о плоскости, проходящей через прямую, параллельную другой плоскости оказалось бы, что AB || MN и BC || MN, то есть через точку B на плоскости α проходили бы две прямые AB и BC, параллельные MN, что невозможно => плоскости α и β не имеют общей точки, а потому α || β.

Свойства:

1. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей плоскостью, то получающееся линии пересечения параллельны.



Дано: $\alpha \parallel \beta$; $\alpha x \psi = AB$; $\beta x \psi = CD$

Доказательство: $AB \| CD$

Доказательство:

Прямые AB и CD лежат в одной плоскости ψ. Если бы они были не параллельны, то пересеклись бы в какой-нибудь точке M. Прямая AB лежит в плоскости α, а прямая CD - в плоскости β, => точка M была *бы* общей у плоскостей α и β, но это невозможно, т.к. плоскости *α и β* параллельны. Итак AB *и* CD, находясь в одной плоскости, не пересекаются, а потому AB || CD.

3. Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и к другой.

3. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

4. Два угла с соответственно параллельными и одинаково направленными сторонами равны.

5.Перпендикулярность прямой и плоскости.

Определение, признак, свойства.

Определение:

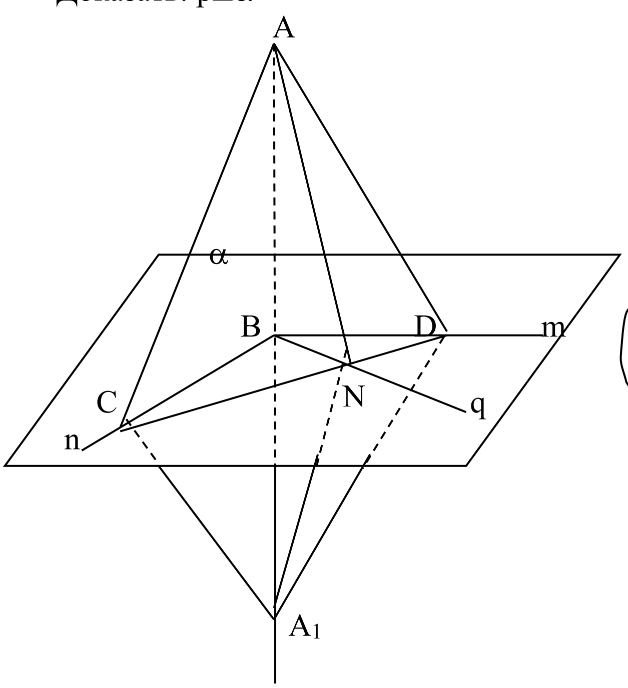
Прямая называется перпендикулярной плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой этой плоскости.

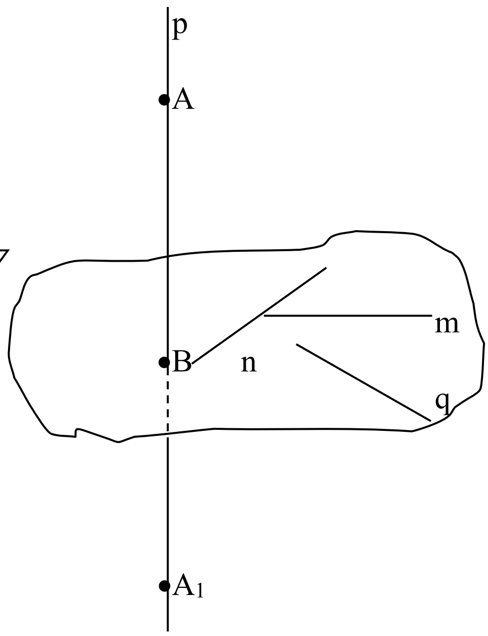
5.1Признак параллельности прямой и плоскости:

Теорема: Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в некоторой плоскости, то она перпендикулярна к любой прямой лежащей в этой плоскости.

Дано: $p \perp m x n \in \alpha; q \in \alpha$

Доказать: $p \perp \alpha$

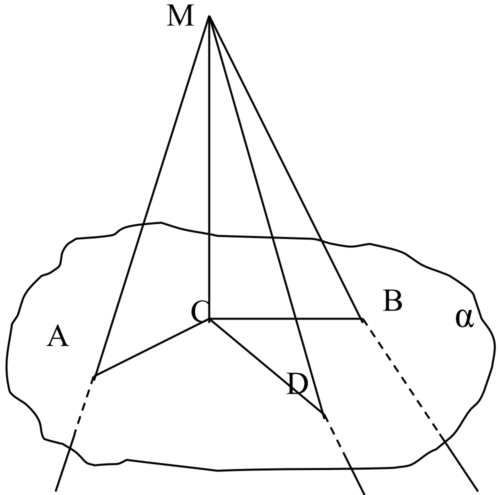




1. $_\Delta ACD = {}_\Delta A_1CD$ (по трём сторонам), CD – общая, $AC=A_1C, AD=A_1D \Rightarrow \angle ADC=\angle A_1DC$

2. $_\Delta NAD={}_\Delta NA_1D$ (по углу и двум сторонам), $\angle ADN=\angle A_1DN$, ND – общая $\Rightarrow AN=A_1N$

3. $_\Delta ABN={}_\Delta A_1BN$,(по трем сторонам) $AB=A_1B$, $AN=A_1N$, BN – общая, отсюда $\angle ABN=\angle A_1BN=90^\circ \Rightarrow p\perp q$, а значит $p\perp\alpha$.



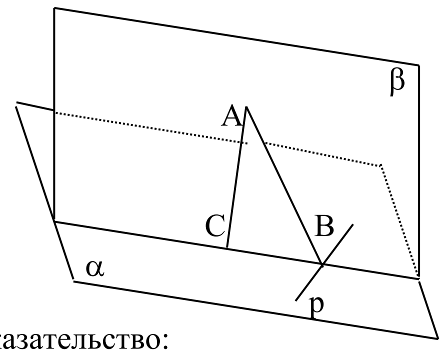
5.2 Свойства перпендикуляра и наклонной.
Дано: $M\notin\alpha$; $MC\perp\alpha$

$AC=пр_\alpha MA$
$CB=пр_\alpha MB$
$CD=пр_\alpha MD$
$$\left.\begin{array}{l} MA^\wedge\alpha=\angle MAC \\ MB^\wedge\alpha=\angle MBC \end{array}\right\}$$

Угол между прямой и плоскостью

Теорема. Если из точки вне плоскости провести к плоскости перпендикуляр и наклонные, то:
1. Перпендикуляр короче всякой наклонной;
2. Наклонные имеющие равные проекции равны;
3. Из двух наклонных, имеющих неравные проекции, та больше, у которой проекция больше.

5.3 Теорема о трех перпендикулярах: Прямая, проведённая на плоскости перпендикулярно к наклонной, перпендикулярна к проекции этой наклонной.
Дано: AB – наклонная, $CB=пр_\alpha AB$, $p\perp AB$
Доказать: $p\perp CB$



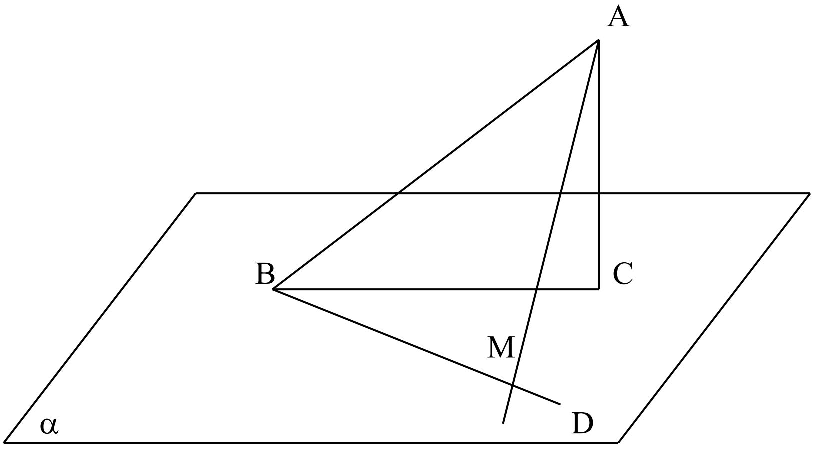
Доказательство:
$AC\perp\alpha$, AB – наклонная
Проведём через наклонную AB и её проекцию CB плоскость. Прямая p перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости
β: $p\perp AC$ и $p\perp AB$, Тогда прямая p перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости β.
Следовательно, $p\perp CB$

Обратная теорема:
Прямая, проведённая на плоскости перпендикулярно к проекции наклонной, перпендикулярна к самой наклонной.

6.Угол между прямой и плоскостью: определение, свойства.

Определение: Углом между прямой и плоскостью называется острый угол между этой прямой и её проекцией на данную плоскость.

Теорема: Угол между наклонной и её проекцией на плоскость меньше угла, составленного этой наклонной и любой другой прямой, проведённой в этой плоскости через основание наклонной.
Дано: $BC = пр_{\alpha}AB$, AB – наклонная, BM – произвольная прямая, $AC \perp \alpha$
Доказать: $\angle ABC < \angle ABM$

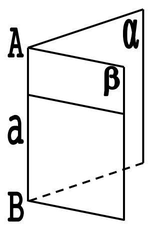


Доказательство:
Отложим на BM отрезок BD=BC, соединим точки A и D и рассмотрим полученные треугольники ABC и ABD. В этих треугольниках сторона AB общая и BC=BD, т.е. две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого; в то же время третьи их стороны не равны, причём AD>AC? Из планиметрии известно, что если две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, то против большей из неравных сторон лежит и больший угол. В данном случае AD>AC, следовательно, ABM>ABC.

7.Двугранные углы. Определение, основные понятия, свойства.

Определение*:* Двугранным углом называется геометрическое тело, состоящее из двух полуплоскостей, исходящих из одной прямой.

Основные понятия:



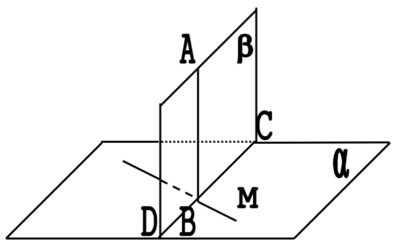
Грани – полуплоскости, образующие двугранный угол;
Ребро - прямая, из которой исходят грани;
Линейный угол - угол, образованный двумя перпендикулярами, восстановленными к ребру из произвольной его точки и лежащими на гранях угла.
Виды:
Развернутый - обе грани двугранного угла образуют одну плоскость.
Прилежащие - два двугранных угла, имеющих общее ребро, общую грань и две другие грани, расположенные по разные стороны от общей грани.
Смежные - прилежащие двугранные углы, которые имеют одну общую грань, а две другие

грани составляют одну плоскость.
Прямой - каждый из равных смежных двугранных углов.
Равные - такие два угла, которые можно совместить.
Свойства:
1. Если два двугранных угла равны, то и их линейные углы равны.
2. Если два двугранных угла не равны, причем большему двугранному углу соответствует и больший линейный угол.
3. Двугранные углы равны, если их линейные углы равны.

8. Перпендикулярные плоскости. Определение, признак, свойства.

Определение: Плоскости, образующие прямой двугранный угол, называются взаимно перпендикулярными.
Признак перпендикулярности плоскостей:

Теорема: Если плоскость проходит через перпендикуляр к другой плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

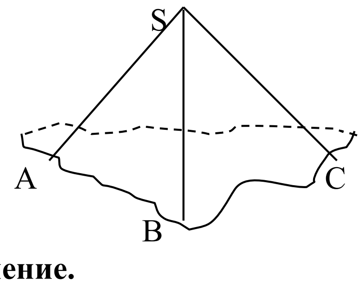


Дано: $AB \perp \alpha$
$AB \in \beta$
Доказать: $\beta \perp \alpha$

Доказательство:

Плоскость β имея общую точку В с плоскостью α, пересечется с ней по некоторой прямой CD, проходящей через точку В. Восстановим в плоскости α из точки В перпендикуляр ВМ к CD. Так как $AB \perp \alpha$, то $AB \perp BM$ и $AB \perp CD$ прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.
Два перпендикуляра в точке В к ребру CD двугранного угла βCDα образуют линейный угол АВМ этого двугранного угла. Угол АВМ прямой, следовательно, и двугранный угол βCDα, ему соответствующий тоже прямой, то есть $\beta \perp \alpha$ (прямому двугранному углу соответствует прямой линейный угол и обратно).
Свойства перпендикулярных плоскостей.
1. Если две плоскости взаимно перпендикулярны, то любая прямая, лежащая в одной из них и перпендикулярная к линии их пересечения, перпендикулярна к другой плоскости.
2. Если две плоскости взаимно перпендикулярны и из какой-нибудь точки одной из них опущен перпендикуляр на другую, то этот перпендикуляр лежит в первой плоскости.

9. Трехгранный угол. Определение, свойства.



Определение.

Проведем из точки S три луча SA, SB и SC, не лежащие в одной плоскости. Через каждую пару лучей проведем плоскости, которые пересекутся по прямым SA, SB и SC. Части этих плоскостей, ограниченные их линиями пересечения, образует пространственную фигуру, которая называется трехгранным углом.

Основные понятия.

Гранями трехгранного угла называются части плоскостей, образующие трехгранный угол.
Вершиной трехгранного угла называется точка пересечения его граней.
Ребрами трехгранного угла называются полупрямые, по которым пересекаются его грани.
Плоскими углами трехгранного угла называются углы, образованные его ребрами, взятыми попарно.
Двухгранными углами трехгранного угла называются двухгранные углы, образованные каждыми двумя его гранями.

Свойства:

Теорема: В трехгранном угле любой плоский угол меньше суммы двух других его плоских углов.

10.Обязательный минимум задач по теме: "Прямые и плоскости в пространстве".

1. Из точки А, отстоящей от плоскости на 12 см, проведена к этой плоскости наклонная АВ, равная 37 см. Найти проекцию АВ на данную плоскость и угол, который образует АВ с плоскостью.

2. Из некоторой точки пространства проведены к плоскости две наклонные длиной 20 см и 15 см; проекция первой из них на плоскость равна 16 см; найти проекцию второй наклонной.

3. Из некоторой точки пространства проведены к данной плоскости перпендикуляр, равный 6 см, и наклонная длиной 9 см. Найти проекцию перпендикуляра на наклонную.

4. Из точки М, отстоящей от плоскости Р на расстоянии 4 см, проведены к этой плоскости наклонные МА, МВ, МС под углами в 30, 45, 60. Определить длину наклонных МА, МВ и МС.

5. Из вершины D прямоугольника ABCD, стороны которого AB=9 см и BC=8 см, восстановлен к плоскости прямоугольника перпендикуляр DF=12 см. Найти расстояние от точки F до вершин прямоугольника.

6. Наклонная равна α. Чему равна проекция этой наклонной на плоскости, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) 45º; 2) 60º; 3) 30º?

7. Точка отстоит от плоскости на h. Найти длину наклонных, проведённых из неё под следующими углами к плоскости: 1) 30º ; 2) 45º; 3) 60º.

8. Найти расстояние точки от плоскости, если расстояние этой точки от двух точек, лежащих на плоскости, равны 51 см и 30 см, а проекции соответствующих наклонных на данную плоскость относятся, как 5:2.

9. Из точки, отстоящей от плоскости на а, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45º и 30º, а между собой прямой угол. Определить расстояние между концами наклонных.

10. Из точки отстоящей от плоскости на а, проведены две наклонные под углом в 30º к плоскости, причём их проекции составляют между собой угол 120º. Определить расстояние между концами наклонной.

11. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость; концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

12. Катеты прямоугольного ABC равны 12 дм и 16 дм., из вершины прямого угла С восстановлен к плоскости треугольника перпендикуляр СМ=28 дм. Найти расстояние от точки М до гипотенузы.

13. Стороны треугольника 15 см, 37 см и 44 см., из вершины большего угла треугольника восстановлен к его плоскости перпендикуляр, равный 16 см. Найти расстояние от его концов до большей стороны.

14. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15м и 20м., из вершины прямого угла С проведён к плоскости этого треугольника перпендикуляр CD=35м. Найти расстояние от точки D до гипотенузы АВ.

15. Стороны треугольника: 10 см, 17 см и 21 см., из вершины большего угла этого треугольника проведён перпендикуляр к его плоскости, равный 15 см. Определить расстояние от его концов до большей стороны.
16. Двугранный угол равен 60º . На одной грани дана точка, расстояние которой до другой грани равно 1,5 дм. Найти с точностью до 0,01 см расстояние этой точки от ребра.
17. Внутри прямого двугранного угла взята точка на расстоянии 12 см и 16 см от его граней. Найти расстояние этой точки от его ребра.
18. На грани двугранного угла взяты две точки, расстояния которых от второй грани равны 10 см и 16 см. Расстояние второй точки от ребра двугранного угла равно 32 см. Найти расстояние первой точки от ребра.
19. Через гипотенузу АВ прямоугольного треугольника проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника двугранный угол в 60º . Найти расстояние от вершины С треугольника до плоскости α, если катеты данного треугольника равны 6 дм и 8 дм.
20. Через гипотенузу равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом в 30º к плоскости треугольника. Найти расстояние этой плоскости от вершины прямого угла, если гипотенуза равна 40 см.

Тема 3: Предел функции в точке.

1. Определение, свойства.

Число В называется пределом функции f(x) при $x \to a$, если для любого числа έ > 0 можно указать такое δ>0 , что для любого x , удовлетворяющего неравенству 0< $|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|\ f(x) - B\ |$< έ. В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=B$.

Теорема о единственности предела.

Если функция f(x) имеет предел при $x \to a$, то этот предел единственный.

Теоремы о пределах.

1. Предел суммы(разности) конечного числа функций равен сумме разности их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

2. Предел произведения конечных чисел функции равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right]=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x).$$

3. Предел отношения двух функций равен отношению их пределов, если последние существуют и предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \text{ если } \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Следствия.

1. Постоянный множитель можно вынести за знак предела :

$$\lim_{x\to a}\left[k\cdot f(x)\right]=k\lim_{x\to a} f(x).$$

2. Если n- натуральное число, то $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$, $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$

3. Предел многочлена (целой рациональной функции)
$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \ldots\ldots + a_{n-1} x + a_n$ при $x\to a$
равен значению этого многочлена при $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x\to a} P(x) = P(a)$

4. Предел сложной функции $y = f\left[\varphi(x)\right]$ $\quad \lim\limits_{x\to a} f\left[\varphi(x)\right]= f\left[\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)\right]$

2.Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Определение: Функции f(x) называется бесконечно малой при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f$(x)=0

Функции f(x) называется бесконечно большой при x$\to$a, если $\lim\limits_{x\to a} f$(x)=$\pm\infty$

Отметим свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций.

1. Если функция f(x) и φ(x) – бесконечно малые при $x \to a$, то их сумма f(x) + φ(x) при $x \to a$,так же является бесконечно малой.

2. Если функция f(x)-бесконечно малая при $x \to a$, F(x)- ограниченная функция , то их произведение f(x) · F(x) есть функция бесконечно малая.

Следствие: Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть величина бесконечно малая.

3. Если при $x \to a$, функция f(x) имеет конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f$(x)=B, а функция φ(x) бесконечно большая , то

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)+\varphi(x)\right]=\infty,\ \lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right]=0.$$

4. Если функция f(x)-бесконечно малая при x$\to$a, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно большая

Причем предполагается , что в окрестности точки a функция f(x) не обращается в ноль.

Если при $x \to a$, функция $\varphi(x)$ -бесконечно большая, то функция $\frac{1}{f(x)}$ - бесконечно малая.

Между бесконечно малой функцией и функцией, имеющей конечный предел, существует следующая зависимость: Если функция f(x) имеет конечный предел при $x \to a$, то ее можно представить в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x \to a$. Наоборот, если функция f(x) может быть представлена в виде суммы постоянной и бесконечно малой функции при $x \to a$, то эта функция имеет конечный предел при $x \to a$, и этот предел равен значению постоянной.

5. Предел функции при $x \to t_\infty$, вычисляем, применяя свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.

3.Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=1$$ I – замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{a\to 0}\left(1+\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$ II – замечательный предел

e = 2,7181818…….. - натуральное число.

4.Техника вычисления пределов

4.1. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3+2x}{3x-8}$

Решение: Так как $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8) = 3\lim\limits_{x\to 3}x - \lim\limits_{x\to 3}8 = 3*3-8 = 1 \neq 0$, то

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3+2x}{3x-8}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 3}x\right)^{3+2}\lim\limits_{x\to 3}x}{3\lim\limits_{x\to 3}x-\lim\limits_{x\to 3}8}=\frac{3^3+2*3}{1}=33.$$

4.2. Найти $\lim\limits_{x\to4}\frac{5}{3x-12}$

Найдем предел знаменателя: $\lim\limits_{x\to4}(3x-12)=3\lim\limits_{x\to4}(x-4)=3(4-4)=12-12=0$;

Теорему о пределе частного приметь нельзя, т. к.: $\lim\limits_{x\to4}(3x-12)=0$, то $3x-12\to0$. Поэтому

$$\lim_{x\to4}\frac{5}{3x-12}=5\lim_{x\to4}\frac{1}{3x-12}=5*\frac{1}{\alpha}=\infty\ (\alpha-\text{бесконечно малая величина}).$$

4.3. Найти $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3+3x}{x^2+x}$.

Решение. Имеем $\lim\limits_{x\to0}(x^3+3x)=\left(\lim\limits_{x\to0}x\right)^3+3\left(\lim\limits_{x\to0}x\right)=0^3+3*0=0$; $\lim\limits_{x\to0}(x^2+x)=$ $=\left(\lim\limits_{x\to0}x\right)^2+\lim\limits_{x\to0}x=0^2+0$. Следовательно, получили неопределенность вида 0/0.

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to0}\frac{x(x^2+3)}{x(x+1)}=\lim_{x\to0}\frac{x^2+3}{x+1}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to0}x\right)^2+\lim\limits_{x\to0}3}{\lim\limits_{x\to0}x+\lim\limits_{x\to0}1}=\frac{0^2+3}{0+1}=3$$

4.4. Найти $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

Решение: При $x\to2$ пределы числителя и знаменателя равны нулю; следовательно, получим неопределенность вида 0/0. Разложим числитель на линейные множители:

$$x^2+x-6=0, x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+6}=-\frac{1}{2}\pm\frac{5}{2}, x_1=2, x_2=-3,\text{ следовательно, } x^2+x-6=(x-2)(x+3).$$

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x+3)}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+3)=\lim_{x\to2}x+\lim_{x\to2}3=2+3=5.$$

4.5. Найти $\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\sqrt{x+4}-4}{x-12}$.

Решение. При $x\to12$ получим неопределенность вида 0/0. Чтобы избавиться от неопределенности, преобразуем данную функцию, умножив числитель и знаменатель на выражение $\sqrt{x+4}+4$:

$$\lim_{x\to12}\frac{(\sqrt{x+4}+4)(\sqrt{x+4}+4)}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)}=\lim_{x\to12}\frac{x+4-16}{(x-12)(\sqrt{x+4}+4)}=\lim_{x\to12}\frac{x-12}{(x-12)(\sqrt{x+4+4})}=\lim_{x\to12}\frac{1}{\sqrt{x+4}+4}=\frac{1}{\sqrt{12+4}+4}=\frac{1}{8}$$

4.6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9}{4x+5}$

Решение: При $x\to\infty$ знаменатель $4x+5$ есть бесконечно большая функция; тогда $\frac{1}{4x+5}$ – бесконечно малая функция. Следовательно, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{9}{4x+5}=0$

4.7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+7}{7x+3}$.

Решение: Пределы числителя и знаменателя при $x\to\infty$ - бесконечно большие величины, т.е. получим неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Поэтому преобразуем данную функцию, разделив почленно числитель и знаменатель на x:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+7}{7x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{7}{x}}{7+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}5+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x}}=\frac{5+0}{7+0}=\frac{5}{7}.$$

Найти следующие пределы:

1. $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-4)$	20. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x+5}{2}$.
2. $\lim\limits_{x\to-2}(2x^4-20)$	21. $\lim\limits_{x\to a}(2x^3-3x+1)$
3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3}{5x+3x^2}$	22. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^3-2x-1}{x^2-x-7}$
4. $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^3-25}{x+5}$	23. $\lim\limits_{x\to11}\dfrac{x^2-121}{x-11}$
5. $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+3x-10}{x+5}$	24. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{2x^3-x-1}$
6. $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$	25. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-4x^3+3x^4}{(x-1)^3}$
7. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$	26. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{p}-\sqrt{p-x}}{x}$
8. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$	27. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-4}{5x^3+x^2}$
9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}{2x}$	28. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x^2+x}$

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{10-3x^2}{7-2x^2}$	29. $\lim\limits_{x-3}(5x^3-100)$
11. $\lim\limits_{x\to-2}(4x^5-50x)$	30. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7x^3+3x^2}{5x+9}$
12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{9x^2}{5x^3+6x^4}$	31. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-3x+5}{x^2-x+2}$
13. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-x-6}{x-3}$	32. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{x-3}$
14. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$	33. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+3x^3}{3x^4+x^5-2x^2}$
15. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^3-3x^2+2x-2}{(x-1)^3}$	34. $\lim\limits_{x\to-2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$
16. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1+x^2}{2x-1+2x^2}$	35. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{p+x}-\sqrt{p-x}}{x}$
17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-2x^3-4}{7x^3+x^2-5x}$	36. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^2+3x-1}{x^2}$
18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x^5}{x^2+x^4}$	37. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$
19. $\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^2}{2+3x}-\dfrac{x^3}{3x^2-4})$	38 $\lim\limits_{x-a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$

5.Задания для внеаудиторной самостоятельной работы

1. $\lim\limits_{x\to2}\left(4x^3-5x^2+3x-12\right)$

2. $\lim\limits_{x\to-1}\left(4x-x^2\right)\left(3x+2\right)$

3. $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{6x-x^2}{2x-7}$

11. $\lim\limits_{x\to4}\sqrt{x}\left(2x-x^3\right)$

12. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-6x}{2x-x^2}$

13. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2-3x-14}{x^2+x-2}$

4. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{9-x^2}$

5. $\lim\limits_{x\to -2}\left(3x^5-\dfrac{x^4}{2}+3x-8\right)$

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2+3x-4}{3x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{2x+6}$

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{3-x}}{x}$

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{8x}{3x-12}$

14. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-6}{3x^2-4x-15}$

15. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-7x+10}$

16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$

17. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{7}{2x^2+3x}$

18. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^2-6x+8}{4x^2+9x}$

19. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)$

20. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{1}{\sqrt{4x^2+2}-2x}$

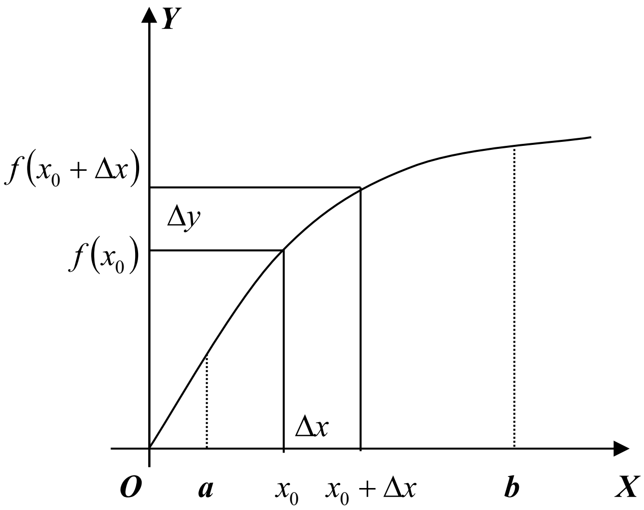
Тема 4: Производная функции в точке.

1.Определение производной функции в точке.

Определение: Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$\boxed{y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Дано: $Y=f(x),\ x\in\,]a,b[$



$x_0\in\,]a,b[$ x_0 - первоначальное значение аргумента.

$f(x_0)$ - первоначальное значение функции.

Δx - приращение аргумента.

$f(x_0+\Delta x)$ - наращённое значение функции.

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ - приращение функции.

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ - скорость изменения функции.

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - мгновенная скорость изменения функции.

$y', f'(x), \dfrac{dx}{dy}$ - обозначение производной.

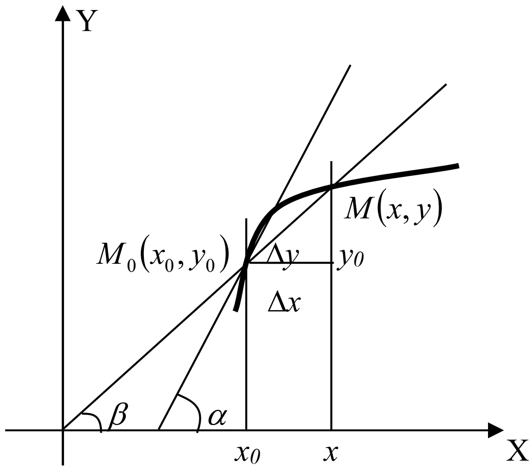
Математический смысл производной.

Производная функции в точке есть мгновенная скорость изменения функции при изменении её аргумента.

Физический смысл производной.

Мгновенная скорость неравномерного движения есть производная пути по времени $V = S_t'$.

Геометрический смысл производной.



Пусть кривая L – график функции $y = f(x)$, где $x \in]a,b[$. $M_0, M \in L$. Проведём секущую M_0M. Если $k = tg\beta$ - её угловой коэффициент, то $tg\beta = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Пусть теперь $x \to x_0$, т.е. $M \to M_0$, M_0M меняет своё положение, т.е. изменяется угол $\beta \to \alpha$; $tg\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то $tg\alpha = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \Rightarrow$ есть прямая M_0M, являющаяся предельным положением секущей при приближении точки M по прямой к M_0. Эта прямая будет касательной к кривой L в точке M_0. Таким образом, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 то её график имеет касательную в точке $(x_0; f(x_0))$, угловой коэффициент которой равен $f'(x_0) \Rightarrow$ производная функции $f(x)$ в x_0=угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$.

Экономический смысл производной.

1. Производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее *экономический смысл производной.*

Издержки производства y будем рассматривать как функцию количества выпускаемой продукции x. Пусть Δx— прирост продукции, тогда Δy — приращение издержек производства и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ выражает **предельные издержки** *производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.* Предельные издержки зависят от уровня производства (количества выпускаемой продукции) x и определяются не постоянными производственными затратами, а лишь переменными (на сырье, топливо и т.п.). Аналогичным образом могут быть определены *предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность* и другие предельные величины.

2. Алгоритм вычисления производной.

1. При заданном $\Delta x \to 0$ найдём $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

2. Найдём $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

3. Найдём $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Процесс нахождения производной данной функции называется дифференцированием.

3.Таблица формул дифференцирования.

1. $C' = 0$ (с – константа)

2. $(kx+b)' = k$

3. $(u+v)' = u' + v'$

4. $(uv)' = u'v + uv'$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

6. $(x^m)' = mx^{m-1}$

7. $(a^x)' = a^x * \ln a$

8. $(e^x)' = e^x$

9. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

11. $(\sin x)' = \cos x$

12. $(\cos x)' = -\sin x$

13. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

14. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

15. $y'_x = \dfrac{1}{x'_y}$ обратная ф-я

16. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

18. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

19. $(arcctg)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

20. $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$

$y'_x = f'_u * u'_x$

сложная функция.

4.Основные правила дифференцирования

Найти производные функций:

1. Производная степенной функции.

$y = x^4$

$y = x^9$

$y = 2x^7$

$y = \dfrac{4}{x^2}$

$y = \dfrac{1}{3x^5}$

$y = \dfrac{2}{3x}$

$y = 8\sqrt{x}$

$y = 6\sqrt[3]{x^2}$

$y = 3\sqrt[4]{x^3}$

$y = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$y = \dfrac{4}{\sqrt[3]{x}}$

$y = \dfrac{1}{2\sqrt[5]{x^2}}$

$f(u) = \dfrac{\sqrt[3]{u}}{u^2}$ $\quad f'(8) = ?$

$f(t) = \dfrac{6t^2\sqrt{t}}{\sqrt{t^3}}$ $\quad f'(4) = ?$

$f(u) = \dfrac{12}{u^2}$ $\quad f'(-3) = ?$

2. Производная алгебраической суммы функций.

$y = 3x - 4\sin x + 12$

$y = \dfrac{2}{x^3} + 5tgx - e^x$

$y = 9\sqrt[3]{x} - 2\cos x + 1{,}9$

$y = 2x\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{3x^2}{\sqrt{x}} + 6$

$y = \dfrac{\ln x}{3} - 6ctgx + 1{,}7$

$y = \dfrac{0{,}1}{\sqrt[5]{x^2}} - \dfrac{e^{2x}}{2} + \dfrac{\arcsin x}{4}$

3. Производная произведения функций.

$y=(3-4x)(3+5x^2)$

$y=6\sqrt{x}(3x-x^3)$

$y=\dfrac{x-2}{4}(x^4-2x)$

$y=e^x(4-2\cos x)$

$y=x^2(2+3\ln x)$

$y=\sin x(x-ctgx)$

4. Производная частного.

$y=\dfrac{e^x}{12-3x}$

$y=\dfrac{\ln x}{2x+x^4}$

$y=\dfrac{x^3}{\sin x}$

$y=\dfrac{1-3x}{x^3}$

$y=\dfrac{x}{2-4x^2}$

$y=\dfrac{\cos x}{1-tgx}$

5. Производная сложной функции.

Функция, аргументом которой является также функция, называется сложной.

Общий вид сложной функции: $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$

Производная сложной функции $y_x'=f_u'*u_x'$

$y=\sin^3 x$ сложная степенная функция

$y=\sqrt{x^2-\cos x}$ сложная степенная функция

$y=tg4\sqrt{x}$ сложная тригонометрическая функция

$y=\ln(\cos x-2\sin x)$ сложная логарифмическая функция

$y=e^{\sin x-4}$ сложная показательная функция

$y=\arcsin 5x$ сложная обратная тригонометрическая функция

Практическая работа:

$y=4(8x-x^6)^5$

$y=\dfrac{2}{(3-5x)^3}$

$y=\cos 3x+\sin\dfrac{x}{6}$

$y=\dfrac{1}{3}tg^3\dfrac{1}{x}$

$y=\dfrac{1}{5}\cos^5 x-\dfrac{2}{3}\cos^3 x-\cos 4x$

$y=\ln(\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{1}{2x^2}+5)$

$y=\ln(2x-\sqrt[4]{x})$

$y=\ln^2\sqrt{x}$

$y=e^{\frac{x}{\ln x}}$

$y=x^3e^{tgx}$

$y=arctg\sqrt{x}$

$y=\dfrac{1}{2}\sin^4\dfrac{1}{e^{3x}}$

Домашнее задание: Найти производную функции:

$y=\dfrac{2}{x^5}-3ctgx+12$

$y=\sqrt{x}(x-3\cos x)$

$y=\dfrac{3x}{x^2-x}$

$y=3x\cos 2x-2x\sin 3x$

$y=\ln\dfrac{x^2}{1-x^2}$

$y=e^{x\ln x}$

$y=\dfrac{1}{2}\sqrt{\cos\dfrac{x}{4}}$

$y=\dfrac{4}{\ln^4 x^3}$

$y=\arcsin\sqrt{x}$

Самостоятельная работа: Найти производную функции:

I вариант

1. $y = 2x^5 - 3x + 16$
2. $y = \dfrac{4}{x^2} + 16x^2 - 2\sin x$
3. $y = x^3(tgx - ctgx)$
4. $y = \ln x(2x - 4x^6)$
5. $y = \dfrac{\ell^x}{3 + 2\cos x}$
6. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{4x - 3x^2}$

II вариант

1. $y = 4x^6 - 8x^3 + 12$
2. $y = 6\sqrt[3]{x} - 30x + 4tgx$
3. $y = \sin x(x - \cos x)$
4. $y = \ell^x(2x^2 + 8x)$
5. $y = \dfrac{tgx}{4 + 3\sin x}$
6. $y = \dfrac{\ln x}{\cos x}$

Проверка домашнего задания: Найти производную функции:

I вариант

1. $y = 9x^4$
2. $y = \dfrac{x^3}{6}$
3. $y = 5x$
4. $y = \dfrac{2}{x^2}$
5. $y = \dfrac{1}{3x^4}$
6. $y = 6\sqrt[3]{x^2}$
7. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^3}}$
8. $y = \ell^x(2x - x^2)$
9. $y = 4\sqrt{x} - 3\ln x + 15$
10. $y = \dfrac{tgx}{1 - tgx}$

II вариант

1. $y = 3x^6$
2. $y = \dfrac{x^2}{2}$
3. $y = 4x$
4. $y = \dfrac{3}{x^3}$
5. $y = \dfrac{1}{2x}$
6. $y = 4\sqrt[6]{x^5}$
7. $y = \dfrac{3}{\sqrt[3]{x^2}}$
8. $y = 4x^3 - 2\sin x + 1{,}8$
9. $y = \cos x(4 - x^2)$
10. $y = \dfrac{\ln x}{2x - 3}$

5.Приложение производной к исследованию свойств функции и построению графиков.

Определение: Переменная величина *y* называется функцией *x*, если каждому значению *x* из области определения соответствует по некоторому закону единственное значение *y*, *y=f(x)*.

Основные свойства функции:

1. Область определения функции – это множество значений переменной **x**, при которой функция имеет смысл.

2. Область значений функции – это множество значений переменной **y.**

3. Четность и нечетность функции:

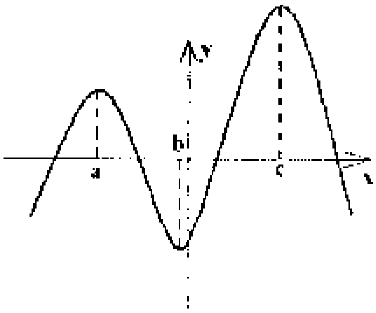
функция $y=f(x)$ называется четной для любых **x** из области определения, если выполняется условие $f(-x)=f(x)$; функция $y=f(x)$ называется нечетной, если для любых x из области определения выполняется условие $f(-x)=-f(x)$

4. Периодичность функции:

функция $y=f(x)$ называется периодичной, если для любых x из области определения существует действительное число $T\neq 0$, такое что выполняется условие $f(x\pm T)=f(x)$

5. Возрастание и убывание функции. Экстремум функции:

функция $y=f(x)$ называется возрастающей на данном интервале, если для любых x_1 и x_2 из данного интервала таких, что $x_1< x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)<f(x_2)$; функция $y=f(x)$ называется убывающей на данном интервале, если для любых x_1 и x_2 из данного интервала таких, что $x_1< x_2$ выполняется неравенство $f(x_1)>f(x_2)$



$Y=f(x)$

при $x\in]-\infty,\ \alpha[U]\beta,\ c[$- функция возрастает

при $x\in]a,b\ [U]\ C_1, +\infty[$- функция убывает.

точка x_0 из области определения функции называется точкой минимума этой функции если найдется такая δ- окрестность $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ точки x, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, при $\boldsymbol{x=b}$ функция $y=f(x)$ имеет *min***.**

точка x_0 из области определения функции называется точкой максимума этой функции если найдется такая δ- окрестность $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, при $x=a$, $x=c$ функция $y=f(x)$ имеет *max*.

Точки *min* и *max* называют точками экстремума, а значение функции в этих точках называют экстремумами функции.

5.1.Признаки возрастания и убывания функции:

Теорема: Если дифференцируемая функция $y=f(x)$, где $x\in]a,b[$ возрастает на интервале $]a,b[$, то $f'(x_0)>0$ для любого $x\in]a, b[$.

Теорема: Если дифференцируемая функция $y=f(x)$, где $x\in]a,b[$ убывает на интервале $]a,b[$, то $f'(x_0)<0$ для любого $x\in]a,b[$.

5.2.Необходимое условие существования экстремума:

Теорема Ферма: Если точка x_0 является точкой экстремума функции $y=f(x)$ и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

5.3.Достаточное условие существования экстремума:

Первое достаточное условие

Теорема 1. Пусть функция f(x) непрерывна в точке x0 и ее δ- окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки $\mathbf{x_0}$.

Тогда:

1. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с плюса на минус, то x_0 является точкой максимума.
2. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с минуса на плюс, то x_0 является точкой минимума.
3. Если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 не меняет знак , то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Второе достаточное условие

Теорема 2. Если функция $y=f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки x, причем $f'(x_0)=0$, а $f''(x_0)\neq 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если $f''(x_0)<0$, и минимум, если $f''(x_0)>0$**.**

Первое правило нахождения экстремума:

1. Найдем первую производную функции $f'(x)$**.**
2. Приравняв ее к нулю, найдем критические точки.
3. Разобьем область определения критическими точками на промежутки и найдем знак производной на каждом промежутке.
4. Если при переходе через критическую точку знак производной меняется с + на -, то имеем максимум, если с – на +, то минимум, если знак не меняется, то экстремума нет.

Аналогично можно составить второе правило по второй производной.

Пример: Найти экстремум функции $y=1/3x^3-4x+2$

1. $y'=x^2-4$

2. $x^2-4=0$

$x^2=4,\ x_{1,2}=\pm 2$

3. y'(при $x=-3$) $= (-3)^2-4 = 5>0$

y'(при $x=0$) $= 0-4 >0$

y'(при $x=3$) $= (3)^2-4 = 5>0$

4. $x=-2 \quad max$

$y=1/3(-2)^3-4(-2)+2=71/3$

$x=2 \quad min$

$y=1/3\cdot 2^3-4\cdot 2+2=-31/3$

Ответ: *max (-2; 71/3), min (2; -31/3)*

6. Выпуклость графика функции, точка перегиба

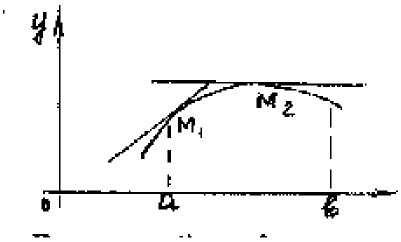
Определение 1. График функции $y=f(x)$ $x\in]a, b[$ называется выпуклым на интервале $]a, b[$, если точки графика расположены ниже касательной, проведенной в любой его точке.

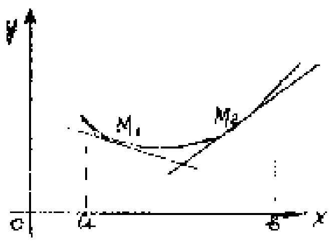
Определение 2. График функции $y=f(x)$ $x\in]a, b[$ называется вогнутым на интервале $]a, b[$, если точки графика расположены выше касательной, проведенной в любой его точке.

Достаточное условие выпуклости графика функции.

Теорема: Если на интервале $|a, b|$ дважды дифференцируемая функция $y=f(x)$ $x\in]a, b[$ имеет отрицательную вторую производную, то график функции выпуклый, если – положительную, то вогнутый.

Выпуклый график *Вогнутый график*





Определение 3. Точка графика непрерывной функции f(x) , которая отделяет выпуклую часть от вогнутой называется точкой перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба.

Теорема: Если функция $y=f(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно на $]a,b[$ и точка $(x_0,f(x_0))$, где $x_0\in]a, b[$ является точкой перегиба графика функции $f(x)$, то $f''(x_0)=0$.

Достаточное условие существования точки перегиба.

Теорема: Если функция $y=f(x)$, $x\in]a\ b[$ дважды дифференцируемая на $]a,b[$ и при переходе через $x_0\in]a,b[$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

Правило нахождения точки перегиба графика функции.

1. Найдем вторую производную функции $f''(x)$**.**
2. Приравняв ее к нулю, найдем критические (стационарные)точки по второй производной.
3. Разобьем область определения функции критическими точками на промежутки и определим знак второй производной на каждом промежутке.
3. Если при переходе через критическую точку знак второй производной меняется, то имеем точку перегиба.

Пример: Найдем точку перегиба графика функции $y=1/3x^3-2x^2+7x-4$

1. $y'=x^2-4x+7$
$y''=2x-4$

2. $2x-4=0$
$x=2$

3. y'(при $x=0$) $= 2\cdot 0-4<0$

y'' (при $x=3$) $= 2\cdot 3-4 =4>0$

4. $x=2$ точка перегиба

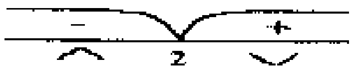
$y=42/3$

Ответ: $(2;\ 42/3)$ точка перегиба

3. Точки пересечения графика функции с осями координат

ось OX: $x=0$ $y=?$

ось OY: $y=0$ $x=?$



Общая схема для построения графиков функций.

1. Найти область определения функции, область значений.
2. Выяснить, не является ли функция четной, нечетной или периодической.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат.
4. Найти промежутки монотонности функции, ее экстремумы.
5. Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
6. Построить график, используя полученные результаты исследований.

Построить график функции $y=x^3-6x^2+9x-3$

1. $x\in]-\infty,+\infty[$, $y\in]-\infty,+\infty[$
2. Функция не является ни четной, ни нечетной, не периодичной
3. OY: $x=0$ $y=-3$ $(0;\ -3)$
4. Найдем экстремумы функции

$y'=3x^2-12x+9$

$3x-12x+9=0 \Rightarrow x_1=1$ $x_2=3$ критические точки

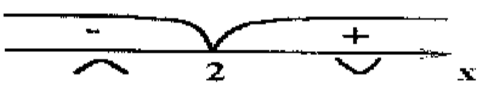
$\left.\begin{matrix} x=1 \\ y=1 \end{matrix}\right\} max$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} x=3 \\ y=-3 \end{matrix}\right\} min$

5. Найдем точку перегиба функции:

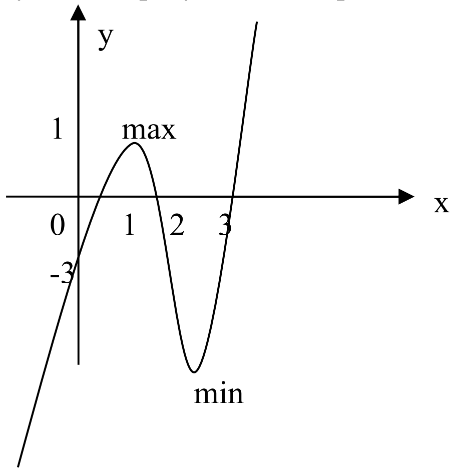
$y''=6x-12$

$6x-12=0 \Rightarrow$ $x=2$ критическая точка

(2;1) – точка перегиба



6. Используя полученные результаты, строим искомый график:



Практическая работа по теме:
«Приложение производной к исследованию свойств функции»

1. Найти экстремумы функции:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1;$

2. $y = -x^3 - x^2 + 5x + 6;$

3. $y = 2x^2 + 3x - 2;$

4. $y = x^4 - 2x^2 - 3;$

5. $y = 3x^4 - 4x^3;$

6. $y = \frac{x^2}{2} - 5 + 2x - x^3;$

7. $y = \frac{2x+1}{1-3x};$

8. $y = \sqrt{x^3 - 3x}.$

2. Найти точку перегиба:

1. $y = 2x^3 - 3x^2 - 4x + 9;$

2. $y = 12x^4 - 12x^2;$

3. $y = \frac{x^3}{3} - 3x^2 - 5x + 1;$

4. $y = x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 4x;$

Исследовать свойства функции и построить график:

1. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 8;$

2. $y = \frac{1}{6}x^3 + \frac{x^2}{2} - 1;$

3. $y = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6x + 1;$

4. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 6x + 2;$

5. $y = x^3 - 2x^2 - 4x + 3;$

6. $y = -2x^2 + 8x - 5;$

7. $y = x^4 - 10x^2 + 9;$

8. $y = -x^4 + 4x^2 + 3;$

9. $y = 0{,}2x^5 - 4x^2.$

6.Задачи на max и min

Теория max и min функции имеет большое применение как в самой математике, так и в решении прикладных задач.

Рассмотрим некоторые задачи:

Задача 1.Разбить число 20 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

Задача 2.Разбить число 14 на два слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшая.

Задача 3.Прямоугольный участок земли в 100 м^2 нужно окопать вдоль всей границы рвом. Как выбрать размеры участка, чтобы длина рва была наименьшая.
Задача 4.Какой из прямоугольников с периметром равным 60 см. имеет наибольшую площадь?
Задача 5.Окно имеет форму прямоугольника, который сверху заканчивается правильным треугольником. Периметр окна равен 3м. Каково должно быть основание прямоугольника, чтобы окно имело наибольшую площадь?
Задача 6.Из квадратного листа жести со стороной 50 см. требуется сделать открытый сверху ящик наибольшего объема и имеющего квадратное основание.
Задача 7.Закон прямолинейного движения тела задан уравнением $S=-t^3+6t^2+4t+8$. Найти max скорость движения тела.
Задача 8.Зависимость пути от времени при прямолинейном движении двух тел задана уравнением: $S_1=\frac{2}{3}t^3+2t^2-t+10$, $S_2=\frac{1}{3}t^3+3t^2+2t-8$. В какой момент времени их скорости будут равны?
Задача 9.Составить уравнение касательной и нормали к параболе $y=3x^2-8x+12$ в точке с абсциссой равной 3.
Задача 10.Найти острый угол между параболами $y=-2x^2$ и $y=x^2-3x$ в точке их пересечения, имеющей положительную абсциссу.
Задача 11.Какой угол образует с осью абсцисс касательная к параболе $y=\frac{x^2}{2}+5x-3$ проведенная в точке $M_0(2;9)$. Составить уравнение касательной.
Задача 12.Когда скорость точки, движущейся прямолинейно по закону $S=t^2-4t+5$, равна 0?
Задача 13.Требуется огородить проволочной сеткой длиной 60м прямоугольный участок, прилегающий к стене. Найти размеры участка, при которых его площадь будет наибольшей.
Задача 14.В равнобедренный треугольник вписать прямоугольник наибольшей площади.

7.Задания для самостоятельной работы по теме: “Производная и её приложения”

1.Исследовать свойства функции и построить график.

1.$y=\frac{x^4}{8}-x^2-1$
2.$y=-x^4-4x^2+5$
3.$y=\frac{x^4}{2}-5x^2+6$
4.$y=-\frac{x^4}{8}+2x^2-1$
5.$y=2x^4-x^2+3$
6.$y=-\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+1$
7.$y=-x^4+8x-7$
8.$y=\frac{x^4}{4}-3x^2-1$
9.$y=-x^4+6x+16$
10.$y=\frac{x^4}{2}-x^2-1$
11.$y=-x^4+3x^2+4$
12.$y=x^6-6x^4+2$
13.$y=\frac{x^5}{5}-x^3-4x$
14.$y=x^5-2x^3+x$
15.$y=x^5-5x^3+3$
16.$y=(x+1)^3(5-x)$
17.$y=6x^4-8x^3-3x^2+6x$
18.$y=x^2-3x^4$
19.$y=2x^5-3x^3+4$
20.$y=-x^4+3x^2-2$
21.$y=x^4-6x^2-7$
22.$y=2+12x^2-x^4$
23.$y=\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2-12$
24.$y=x^4-4x^2+3$
25.$y=-x^4+8x^2+9$
26.$y=x^4-3x^2+4$
27.$y=x^4-2x^3-2x^2$
28.$y=3x^4-2x^5-5$
29.$y=-3x^4+x^2+4$
30.$y=(x+2)^2(x-4)$
31.$y=8-2x^2+x^4$
32.$y=x^4-x^2-2$
33.$y=-5x^4+8x^2+3$
34.$y=-x^4+5x^2-6$

2.Найти экстремумы и точку перегиба.

1.$y = x^2 + \sqrt{x+2}$

2.$y = \sin x + \cos x$

3.$y = x - 2arctgx$

4.$y = \ln(x^2 + 4)$

5.$y = arctg\frac{1}{x}$

6.$y = \sqrt{1 + x^2} + 2x$

7.$y = \cos x - \frac{1}{\cos x}$

8.$y = \sqrt{4 - x}$

9.$y = \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$

10.$y = \ln\sin 2x$

11.$y = x\ell^{\frac{1}{x}}$

12.$y = 4x - \frac{\sin x}{x}$

13.$y = xarctgx$

14.$y = \frac{x^3 + 8}{x}$

15.$y = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$

16.$y = \frac{l^x}{x_2}$

17.$y = \ln(x^2 + 4)$

18.$y = \ell^{-x}(x^2 + 1)$

3. Задачи

1. Точка, двигаясь по кривой y = x^2 – 8x + 15, оторвалась от нее в тот момент, когда оказалась на прямой x = 6. Найдите уравнение дальнейшей траектории этой точки.
2. Из множества цилиндров данного объема найдите тот, который имеет наибольший объем.
3. Докажите, что графики функций y = $2x^2$ + 2x – 3 и y = x^3 – 2x + 5 имеют общую касательную в точке A(2; 9). Найдите уравнение этой касательной.
4. Из листового железа прямоугольной формы размером 5x3 дм, нужно вырезать по углам такие квадратики, чтобы после оставшейся части после сгибания получить коробку наименьшей боковой поверхности. Найдите размеры вырезаемых квадратиков.
5. Объем производства зимней обуви, выпускаемой некоторой фирмой может быть описан уравнением $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$ (ед.), где t- календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость её изменения в начале, в середине, в конце года.
6. Сечение шлюзного канала имеет вид прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения 45м. При каком радиусе сечение будет иметь наибольшую площадь?
7. Даны функции f(x) = x^2 , f(x) = x^2 – 2x + 4. Составьте уравнения касательных, проведенных к графикам этих функций в точке их пересечения, и найдите угол между ними.
8. Себестоимость производства телевизоров y (тыс.руб.) описывается функцией $y = 0{,}01x^2 - 0{,}5x + 12, \quad 5 \le x \le 50$, где x- объем выпускаемой продукции в месяц (тыс.ед.).Определить скорость изменения себестоимости при выпуске 40 тыс. ед. продукции.
9. Составьте уравнения касательных, проведенных к графику функции y = x^3 – 4x в точках его пересечения с осью Ox.
10. Требуется изготовить открытый сверху резервуар вместимостью 108 м^3 с квадратным основанием. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на него было израсходовано минимальное количество нержавеющей стали?

11. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 4x + 3$: а) параллельна оси *Ox;* б) образует с осью *Ox* угол 45° ?
12. Каковы должны быть размеры открытого сверху цилиндрического сосуда вместимостью 1 л, чтобы на его изготовление было израсходовано наименьшее количество материала?
13. Составьте уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = 1 - 2x^2$ в точке с абсциссой, равной 0,5.
14. Нужно изготовить коническую воронку с образующей 15 см. Найдите высоту воронки наибольшего объема.
15. Себестоимость производства телевизоров y (тыс.руб.) описывается функцией $y = 0{,}01x^2 - 0{,}5x + 12, \quad 5 \le x \le 50$, где *x*- объем выпускаемой продукции в месяц (тыс.ед.).Определить скорость изменения себестоимости при выпуске 20 тыс. ед. продукции.
16. Тело движется по закону $S(t) = 18t^2 + 10t - 2t^3$ (S – в метрах; t – в секундах). Найдите максимальную скорость движения тела.
17. Функция издержек производства продукции некоторой фирмой имеет вид $y(x) = 0{,}1x^3 - 1{,}2x^2 + 5x + 250$ (ден.ед.) Найти средние и предельные издержки производства при *x*=10.
18. Окно имеет форму прямоугольника с полукругом наверху. Периметр окна равен P. Каковы должны быть ширина и высота прямоугольника чтобы площадь была наибольшей?
19. В какой точке касательная к графику функции y = lnx параллельна прямой y = 2x - 3?
20. Какую начальную скорость υ_0 надо придать метео ракете, для того, чтобы она поднялась на высоту 200 км, если ракета движется вертикально вверх по закону $h = \upsilon_0 t - gt^2/2$?
21. Функция потребления некоторой страны имеет вид: $C(x) = 15 + 0{,}25x + 0{,}36\sqrt[3]{x^4}$, где *x*-совокупный национальный доход. Найти: а) предельную склонность к потреблению; б) предельную склонность к сбережению, если нац. доход составляет 27 ден. ед.
22. Сжатие вертикальной балки пропорционально площади поперечного сечения. Какое поперечное сечение прямоугольной формы должна иметь балка, изготовленная из круглого бревна диаметром d, чтобы сопротивление на сжатие было наибольшим?
23. Объем производства зимней обуви, выпускаемой некоторой фирмой может быть описан уравнением $u = \frac{1}{3}t^3 - \frac{7}{2}t^2 + 6t + 2100$ (ед.), где t- календарный месяц года. Вычислить производительность труда, скорость её изменения в начале, в конце года.
24. Из листового железа требуется изготовить открытый желоб, поперечное сечение которого является равносторонней трапецией с основанием и боковыми сторонами, равными 3 см. Найдите ширину верхней части желоба, так чтобы он вмещал максимальное количество жидкости.

25. Тело движется прямолинейно по закону S = 10*ln*4/4+t (S - в метрах; t - в секундах). Найдите скорость и ускорение тела: а) в момент времени t; б) при t = 1; в) при t = 16.
26. У реки требуется огородить прямоугольный участок земли под питомник фруктовых деревьев, одной стороной которого является прямой обрывистый берег реки. Найдите отношение сторон участка, так чтобы на постройку было израсходовано наименьшее количество материала.
27. Количество электричества, протекающее через проводник начиная с t = 0, определяется по формуле $Q = 0{,}5t^3 + 0{,}2t^2 + t + 1$ (Q — в кулонах, t — в секундах). Найдите силу тока при t = 10.
28. Требуется изготовить открытый цилиндрический резервуар вместимостью 300 м^3. Стоимость материала, из которого производится дно, в два раза

больше стоимость материала, идущего на боковые стенки. При каких размерах резервуара его изготовление окажется наиболее дешевым?

29. Тело, масса которого m = 3 кг, движется прямолинейно но закону $S = t^2 + t + 1$ (S — в метрах, t — в секундах). Найдите кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 5 с после начала движения.
30. С крыши дома высотой 20 м брошен вверх металлический шарик с начальной скоростью 39,3 м/с. Определите: а) скорость шарика и конце 2-й секунды; б) момент начала падения шарика вниз; Скорость распространения сигнала по подводному кабелю пропорциональна выражению $x^2\ln(1/x)$, где x - отношение радиуса металлической сердцевины к толщине изолирующей оболочки. Каким должно быть это отношение, чтобы скорость сигнала была наибольшей?
31. Скорость прямолинейного движения тела выражается законом $v=t^2 - 4t + 5$ (v - в м/с, t - в секундах).
    В какой момент времени ускорение будет равно нулю?
32. Производительность труда рабочих цеха в течение смены описывается эмпирической формулой $P(x) = -2{,}53x^2 + 20{,}24x + 111{,}1$ $(0 < x < 7)$, где x - рабочее время в часах. Вычислите скорость роста производительности труда при x = 2ч. Найдите, в какой момент времени производительность труда окажется максимальной.
33. Эмпирически установлено, что расход горючего в зависимости от скорости движения автомобиля на каждые 100 км определяется по формуле $f(v) = 0{,}55v + 0{,}0066v^2$, где v - скорость автомобиля в км/ч. Найдите наиболее экономичную скорость автомобиля.

Тема 6: Интеграл и его приложения.

1. Дифференциал функции.

$y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ по определению производной функции

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$ по определению предела функции

$\Delta y = y' * \Delta x + \alpha * \Delta x$

$\Delta y \approx y' \Delta x$

Тогда:

$\boxed{dy = y'\Delta x}$ дифференциал функции

$\boxed{\Delta x = dx}$ приращение аргумента

$\boxed{\Delta y \approx dy}$ приращение функции

$\underline{dy = y'dx}$ правило вычисления дифференциала функции

Дифференциал функции – главная часть $y'\Delta x$ приращения функции $y = f(x)$.

Геометрический смысл: Дифференциал функции $y = f(x)$. в точке изобразится приращением ординаты касательной, соответствующим приращению её абсцисы на *dx.*

Приложение дифференциала функции в приближённых вычислениях.

Найти приближённое значение функции: $f(x_0 + \Delta x) = ?$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y$$

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy}$$

Задача.	Пусть $x_0 = 2 \quad \Delta x = 0{,}001$
$f(x) = 2x^2 + 3$	$f(2{,}001) \approx f(2) + dy_x$
$x = 2{,}001$	$f(2) = 2 * 2^2 + 3 = 11$
	$dy_{x_0=2} = y' * \Delta x = 4x_0 * \Delta x$
$f(2{,}001) - ?$	$dy = 4 * 2 * 0{,}001 = 0{,}008$
	$f(2{,}001) \approx 11{,}008$

2.Неопределённый интеграл.

Понятие неопределённого интеграла служит для решения обратной задачи: по заданной производной найти первоначальную функцию.

$\int 2xdx = x^2 + c;$ $\qquad \int 3x^2 dx = x^3 + c;$ $\qquad \int \cos xdx = \sin x + c$.

Пусть задана функция $y = F(x)$ - первоначальная функция (первообразная).

$y' = f(x)$ - производная функции $y = F(x)$

dy - дифференциал функции: $dx = \Delta x;$ $\quad dy \approx \Delta y$

$\boxed{dy = y'\, dx}$ - правило нахождения дифференциала

Для данного дифференциала можно указать множество первообразных функций: $f(x)dx \rightarrow F(x)+c$, так как $(F(x) + c)' = f(x)$

Определение: Совокупность всех первообразных функций $F(x)+c$ для дифференциала $f(x)dx$ называется неопределённым интегралом и обозначается $\int f(x)dx$

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Основные свойства неопределённого интеграла:

1º Дифференциал неопределённого интеграла равен подинтегральному выражению.

$d\int f(x)dx = f(x)dx$

2º Неопределённый интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной.

$\int dF(x) = F(x) + c$

3º Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

a - постоянный множитель

4º Интеграл от алгебраической суммы функции равен алгебраической сумме интегралов от каждой из них.

$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx - \int f_3(x)dx$

3.Таблица формул интегрирования.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c$; $n \neq -1$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$

5. $\int \sin x dx = -\cos x + c$

6. $\int \cos x dx = \sin x + c$

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$

4.Метод непосредственного интегрирования - это интегрирование по формулам, либо подинтегральное выражение сводится к табличному путём алгебраических преобразований.

I. **1.** $\int dx$ **2.** $\int xdx$ **3.** $\int x^3 dx$ **4.** $\int 3x^4 dx$ **5.** $\int 6x^5 dx$

6. $\int 5x^9 dx$ **7.** $\int \frac{4}{x} dx$ **8.** $\int \dfrac{dx}{3x^2}$ **9.** $\int 4\sqrt{x^3}dx$ **10.** $\int \dfrac{dx}{3\sqrt[3]{x}}$

II. **1.** $\int (2x - 9x^2 + 1)dx$ **3.** $\int (2\cos x - \frac{6}{x} + 3e^x)dx$

2. $\int (4x^2 - \frac{2}{x^3} + 3\sqrt[3]{x})dx$ **4.** $\int (\frac{5}{\sqrt{x^3}} - \frac{2}{\sin^2 x} + 6)dx$

III. **1.** $\int (2x-3)(4-3x)dx$ **4.** $\int (5-2x)^2 dx$ **7.** $\int tg^2 xdx$

2. $\int \dfrac{3-2x+4x^3}{2x^2}dx$ **5.** $\int \dfrac{5x-4x^2}{\sqrt{x}}dx$ **8.** $\int \dfrac{(e^x-3)^2}{2e^x}dx$

3. $\int \dfrac{(3-2x)(x^2-3x^4)}{3x^3}dx$ 6) **6.** $\int \dfrac{2-3\sin^2 x}{\sin^2 x}dx$ **9.** $\int 7^x \cdot 5^{2x} \cdot 2^{3x} dx$

Домашнее задание:

1. $\int x^2(3-2x)dx$ **2.** $\int (5+3x^2)(4x - x^2)dx$ **3.** $\int t(2-t)^2 dt$

4. $\int \dfrac{3x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$ **5.** $\int \left(\dfrac{3}{x^3} - \dfrac{8}{\sqrt{x}} + 3\sqrt[3]{x^4}\right)dx$ **6.** $\int \dfrac{U - \sqrt[4]{U}^3 + 2}{\sqrt{U}}dU$

7. $\int \dfrac{4\cos^2 t - 3}{\cos^2 t}dt$ **8.** $\int \left(6x - \dfrac{1}{4\sin^2 x} + 3e^x\right)dx$ **9.** $\int \left(9\sqrt[3]{x^2} - \dfrac{1}{3x} + 4\sin x\right)dx$

5.Метод введения переменной под знак дифференциала: подинтегральное выражение сводится к табличному путём замены части его дифференциалом переменной.

1. $\int (3x-2)^5 dx$ **2.** $\int \dfrac{dx}{(2-3x)^2}$ **3.** $\int \sqrt[3]{(5-3x)^2}dx$ **4.** $\int \sin\left(\dfrac{n}{6} - \dfrac{x}{3}\right)dx$

5. $\int \dfrac{dx}{2\cos^2(1-2x)}$ **6.** $\int e^{4-x^2} xdx$ **7.** $\int \dfrac{2xdx}{3-4x^2}$ **8.** $\int \dfrac{tdt}{\sqrt{2-3t^2}}$

9. $\int \sin x\sqrt{2-3\cos x}dx$ **10.** $\int ctgxdx$ **11.** $\int x^2 \cos 4x^3 dx$ **12.** $\int e^x \sqrt{1-2e^x dx}$

Домашнее задание:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-4x)^3}}$ **2.** $\int \cos\left(3x-\frac{1}{2}\right)dx$ **3.** $\int \frac{3dx}{\sin^2\left(\frac{n}{3}-\frac{x}{4}\right)}$

4. $\int 4x^2\sqrt{2-5x^3}dx$ **5.** $\int \frac{\sin x dx}{2-3\cos x}$ **6.** $\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$

7. $\int xe^{x^2+1}dx$ **8.** $\int \sin x \cos^4 x dx$ **9.** $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}dx$

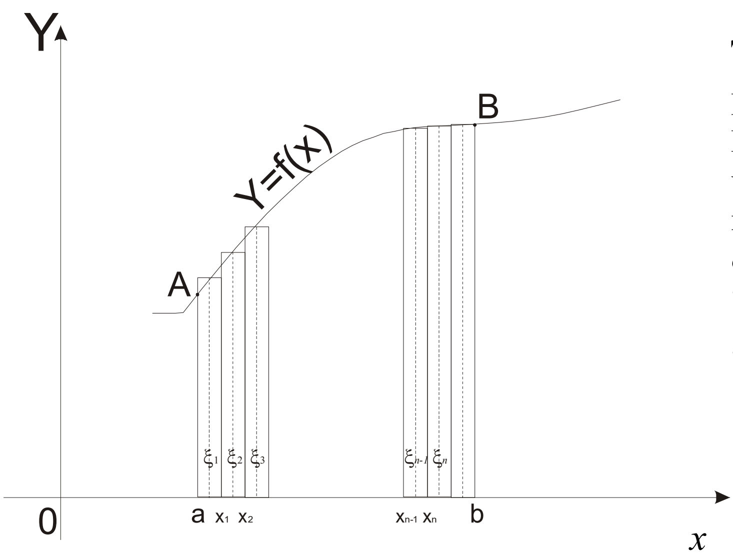
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$ **11.** $\int \frac{dx}{3+4x^2}$ **12.** $\int \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}}dx$

6.Определенный интеграл и его приложения.

Определение: Если $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$ существует и не зависит от выбора точки ξ_i, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на отрезке $[a, b]$, а $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$ называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, и обозначается:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x.}$$

1. Задача о нахождении площади криволинейной трапеции:



Дано: криволинейная трапеция
$x=a$, $x=b$, $y=f(x)$, $y=0$
Найти $S_{фиг.}$=?
Разобьем промежуток $[a,b]$ на n частей, $n\to\infty$, $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$
величина i промежутка $\Delta x_i \to \infty$
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$
$S_{iпрям.} = f(\xi_i) * \Delta x_i$
$S_{крив.\ трап.} \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$ - интегральная сумма
$S_{крив.\ трап.} = \lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i$

2. Понятие интегральной суммы:

Пусть непрерывная функция f(x) определена на промежутке $[a,b]$, $a<b$.

1. Разделим промежуток $[a, b]$ на n частей, $n\to\infty$, наибольшее из этих разбиений $\max \Delta x_i \to 0$.
2. В каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i
   $x_{i-1} < \xi_i < x_i$ и вычислим $f(\xi_i)$.
3. Составим произведение $f(\xi_i) * \Delta x_i$

4. Составим сумму этих произведений

$S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) * \Delta x_i = f(\xi_1) * \Delta x_1 + f(\xi_2) * \Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n) * \Delta x_n$

эту сумму будем называть интегральной суммой функции $f(x)$ на промежутке $[a,b]$

a – нижний предел интегрирования — $f(x)$ – интегрируемая функция

b – верхний предел интегрирования — *x* – интегрируемая переменная

3. Свойства определенного интеграла.

1. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от слагаемых функций:

$$\int_a^b \left[f_1(x) \pm f_2(x)\right]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

3. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Определенный интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5. Отрезок интегрирования можно разбивать на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Теорема о среднем.

Если функция *f(x)* непрерывна на промежутке [a, b], то интеграл от $f(x)$ в пределах от *a* до *b* равен произведению значения интегрируемой функции в некоторой точке *c* $(c \in [a, b])$ на длину промежутка:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

7. Вычисление определенного интеграла.

Для вычисления определенного интеграла от функции *f(x)* в том случае, когда можно найти соответствующую первообразную функцию *F(x)*, служит

формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

т.е. определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Вычислить определенный интеграл:

1. $\int_1^2 x^2 dx$ $\quad \int_1^2 \frac{8}{x} dx$ $\quad \int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{3}} 2cosxdx$

$\int_0^3 x^3 dx$ $\quad \int_{-1}^3 \frac{dx}{3x^3}$ $\quad \int_0^{\frac{\Pi}{4}} \frac{dx}{3cos^2 x}$

$\int_{-1}^2 4xdx$ $\quad \int_0^1 2\sqrt[4]{x}dx$ $\quad \int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{2}} \frac{4}{\sin^2 x} dx$

$\int_2^3 \frac{3}{x^2} dx$ $\quad \int_1^8 \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad \int_0^1 5e^x dx$

2. $\int_{-1}^2 (x^2 - 4x + 3)dx$

$\int_1^4 \left(2x^3 - \frac{3}{\sqrt{x}} + 1\right)dx$

$\int_1^9 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)dx$

$\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \left(\frac{2}{\cos^2 x} - 3\sin x + 1\right)dx$

3. $\int_{-1}^3 (1 - 8x + 6x^2)dx$ $\quad \int_0^2 \left(e^x - \frac{4}{\cos^2 x} + 3\right)dx$

$\int_1^4 \left(2x^2 - 3x - \frac{1}{4\sqrt{x}}\right)dx$ $\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$

$\int_{-1}^2 x^2(3 - x)dx$ $\quad \int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\int_1^3 \frac{4x^2 - 5x + 3}{x^2} dx$

4. $\int_0^2 (2x - 1)^3 dx$ $\quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{3 - \cos x} dx$

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin 2xdx$ $\quad \int_0^1 \frac{e^x}{2e^x - 1} dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$ $\quad \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{2\sqrt{1 + x^2}}$

Самостоятельная работа:

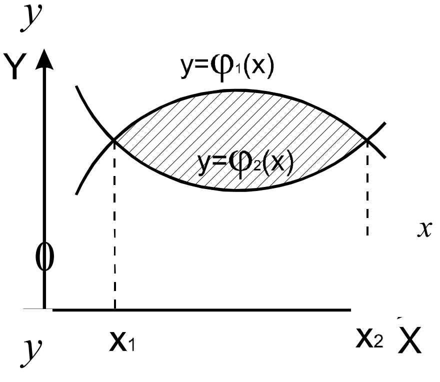
1. $\int_0^a (x^2 - ax)dx$ $\quad$ 2. $\int_{-3}^{-2} \left(\frac{4}{x^2} - 3x\right)dx$ $\quad$ 3. $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \left(\frac{8}{\cos^2 x} + \sin x\right)dx$

4. $\int_{\frac{\Pi}{6}}^{\frac{\Pi}{3}} \cos\left(\frac{\Pi}{3} - x\right)dx$ $\quad$ 5. $\int_{2\sqrt{2}}^4 x\sqrt{x^2 - 7}dx$ $\quad$ 6. $\int_0^{\frac{\Pi}{3}} \frac{\sin xdx}{\cos^4 x}$

7.Приложения определенного интеграла:

1. Вычисление площади плоской фигуры:

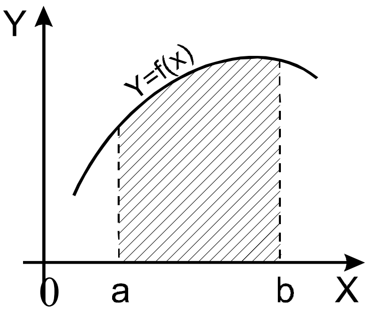
1.



y=φ1(x) $\qquad$ y=φ2(x)

$$S_{фиг} = \int_{x_1}^{x_2} [\varphi_1(x) - \varphi_2(x)]dx$$

2.

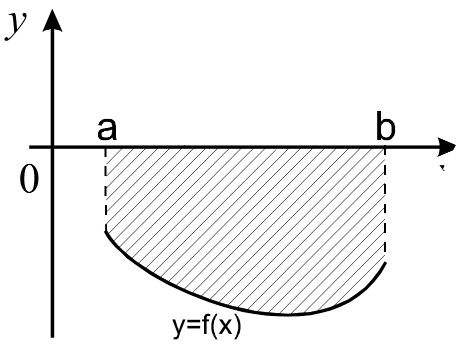


y=f(x) x=a, x=b, y=0

$$S_{фиг} = \int_a^b f(x)dx$$

x

3.



y=f (x) x=a, x=b, y=0

$$S_{фиг} = -\int_a^b f(x)dx$$

Найти площадь плоской фигуры:

1. $y=4x-x^2$, $y=0$
2. $y=2-x$, $x=-4$, $x=0$, $y=0$
3. $y=3x-2$, $x=-2$, $x=-1$, $y=0$
4. $y=3x^2-2x-1$, $y=0$
5. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$, $y=0$
6. $y=x^2+1$, $y=3-x$
7. $y=(x+2)^2$, $y=x+2$
8. $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$
9. $y=4-x^2$, $y=x+2$
10. $x^2=9y$, $x-3y+6=0$
11. $y^2=8x$, $2x-3y+8=0$
12. $3y^2-16x+32=0$, $4x-3y-8=0$

2.Вычисление пути, пройденного точкой:

Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью V=f(t) за промежуток времени [t_1, t_2], вычисляется по формуле: $S = \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$

Задачи.

1. Скорость движения точки $V=(6t^2+4)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 5 с от начала движения.

2. Скорость движения точки $V=(9t^2-8t)$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 4-ю секунду.

3. Скорость движения точки $V=(12t-3t^2)$м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

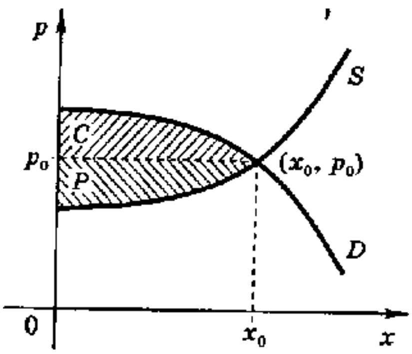
4. Скорость движения точки $V=(24t-6t^2)$м/с. Найдите: 1) путь, пройденный точкой за 3 секунды от начала движения; 2)путь, пройденный точкой за 3-ю секунду; 3) путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

3. Вычисление работы силы.
Работа произведенная переменной силой *f(x)* при перемещении по оси *Ox* материальной точки от *x=a до x=b,* находится по формуле:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Задачи:
1. Пружина растягивается на 0,02м под действием силы 60Н. Какую работу производит эта сила, растягивая пружину на 0,12м?
2. При сжатии пружины на 0,05м затрачивается работа 25Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1м?
3. Под действие силы 80Н пружина растягивается на 0,02м. Первоначальная длинна пружины равна 0,15м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть ее до 0,2м?

4.Приложения определенного интеграла в экономических задачах:
Выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков.



Пусть p=f(x) — кривая спроса D на некоторый товар и p = g(x) — кривая предложения S; (x_0, p_0) — точка рыночного равновесия. Некоторые потребители могут заплатить за этот товар цену p >p_0.
Найдем выигрыш потребителей от установленной p_0.
Разобьем отрезок [0, x_0] на n частей и обозначим точки разбиения $0 = \overline{x}_0,\quad \overline{x}_1,...,\quad \overline{x}_{i-1},\quad \overline{x}_i,...,\overline{x}_n = x_0$.
На каждом интервале выберем точку $x_i^* \in [\overline{x}_{i-1}, \overline{x}_i]$.
Выигрыш потребителей на этом отрезке равен: $(p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i$, где $\Delta x_i = \overline{x}_i - \overline{x}_{i-1}$.
Суммируя все выигрыши, получаем $\sum_{t=1}^{n}(p(x_i^*) - p_0)\Delta x_i$.
Если функция спроса непрерывна и *n* →∞, а длина максимального отрезка разбиения $\max|\Delta x_i| \to 0$, то эта интегральная сумма имеет предел, равный

$$\int_0^{x_0}(f(x) - p_0)dx.$$

Таким образом, выигрыш потребителей

$$C = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0.$$

Аналогично находится выигрыш поставщиков:

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)dx.$$

Очевидно, что выигрыш потребителей равен площади, заключенной между кривой спроса D и прямой p=p_0. Выигрыш поставщиков равен площади, заключенной между прямой p=p_0 и кривой предложения S.

Задача:
Известны законы спроса и предложения:

$$p = 116 - x^2,$$
$$p = \frac{5}{3}x + 20.$$

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков, если было установлено рыночное равновесие.
Решение. Найдем точку рыночного равновесия:

$$116 - x^2 = \frac{5}{3}x + 20 \qquad 3x^2 + 5x - 288 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+3456}}{6}, \textit{откуда } x_1 = 9,\ x_2 = -\frac{32}{3}$$

$$x_0 = 9,\ p_0 = 35$$

$$p_0 x_0 = 35 \cdot 9 = 315$$

$$C = \int_0^9 (116 - x^2)dx - 315 = (116x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^9 - 315 = 486$$

$$P = 315 - \int_0^9 (\frac{5}{3}x + 20)dx = 315 - (\frac{5}{3}\frac{x^2}{2} + 20x)\Big|_0^9 = 315 - \frac{5}{6}\cdot 81 - 180 = 67{,}5.$$

8.Задания для самостоятельной работы по теме: «Интеграл и его приложения».

Задание №1

I. Вычислить

$1.\int_0^3 (x - 2^x)dx$ $\qquad$ $2.\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2(x+\frac{\pi}{6})}$ $\qquad$ $3.\int_{-a}^{+a} (3x^2 - a)dx$ $\qquad$ $4.\int_0^1 \frac{3xdx}{4-x^2}$

II. Фигура, ограниченная прямыми 2x-3y-6=0; x-3=0; x-9=0 и осью Ox, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

III. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5$ и y=x+1.

Задание №2

I. Вычислить

$1.\int_1^4 (2x^2 - 3x - \frac{1}{2\sqrt{x}})dx$ $\qquad$ $2.\int_1^{\sqrt{3}} \frac{128xdx}{(x^2+1)^5}$ $\qquad$ $3.\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 xdx$ $\qquad$ $4.\int_0^{2\pi} \sin\frac{x}{4}dx$

II. Найти объем тела, полученного вращением части кривой $y+x^2-4x=0$, отсекаемой осью Ox от ее вершины вокруг оси Ox.

III. Найти площадь, ограниченную параболой $y=-x^2+10x-16$ и осью Ox.

Задание №3

I. Вычислить

$1.\int_1^3 (6 - 3x + 4x^2)dx$ $\qquad$ $2.\int_0^1 \frac{e^x dx}{2e^x+3}$ $\qquad$ $3.\int_{-1}^1 (2-3x)^2 dx$ $\qquad$ $4.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tg^2 xdx$

II. Найти площадь ограниченную параболой $y=\frac{1}{4}x^2+2$ и прямыми x=2; y=2-0,5x.

III. Под действием силы в 20Н пружина удлинилась на 5см. Какую работу необходимо совершить, чтобы пружина удлинилась на 10см?

Задание №4

I. Вычислить

$1.\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \frac{2}{\cos^2 x})dx$ $\qquad$ $2.\int_{-8}^{8} \frac{5\sqrt[3]{x^2}dx}{3}$ $\qquad$ $3.\int_0^{\sqrt{3}} 6\sqrt{x^4+16}x^3 dx$ $\qquad$ $4.\int_0^{\pi} \sin^2 xdx$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми: x-y-5=0; y=0 и 2x-3y-6=0.

III. Фигура, образованная кривой $y=1/3x^2$ и прямыми x=0; y=0 и x-3=0, вращается вокруг оси Ox. Найти объем тела вращения.

Задание №5

I. Вычислить

$1.\int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}}dx$ $\qquad$ $2.\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{3\sqrt{3}}{4}} \frac{4dx}{9+16x^2}$ $\qquad$ $3.\int_1^3 \frac{2^x dx}{3^{x+1}}$ $\qquad$ $4.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} tgx\sec^2 xdx$

II. Найти площадь, ограниченную линиями: y=-2/3x+4; x=-2; x=5.

III. Пружина в ненапряженном состоянии имеет длину 30см. Под действием силы в 5кН ее длина оказалась равной 25см. Какую работу совершила при этом сила?

Задание №6

I. Вычислить

$$1.\int_{-1}^{1}(1-\sqrt[3]{x^2})dx \qquad 2.\int_{0}^{1}3e^{5-2x}dx \qquad 3.\int_{1}^{3}\frac{4-x+3x^2}{x^2}dx \qquad 4.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin x dx}{1-2\cos x}$$

II. Найти площадь ограниченную линиями: $y=x^2-4x$; y=x.

III. Найти объем шарового сегмента высотой 3см, отсеченного от шара R=6см.

Задание №7

I. Вычислить

$$1.\int_{1}^{2}(4x^3-6x^2+2x+1)dx \quad 2.\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\frac{1}{\cos^2 x}+\sin x)dx \quad 3.\int_{0}^{1}(2x^2-1)^3dx \quad 4.\int_{1}^{4}\frac{3-\sqrt{x}+5x}{\sqrt{x^3}}dx$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+7x-6$; x-y+2=0.

III. При непрерывном производстве хим.волокна производительность $f(t)$ $({}^{T}/_{ч})$ растет с момента запуска 10 часов, а затем остается постоянной. Сколько волокна даст аппарат за первые сутки после запуска, если $f(t)=e^{\frac{t}{5}}-1$ при $t\in[0,10]$

Задание №8

I. Вычислить

$$1.\int_{2}^{3}(3x^2-4x-1)dx \qquad 2.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\frac{1}{\sin^2 x}-2\cos x)dx \qquad 3.\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}4\sin\frac{x}{2}dx \qquad 4.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{1-\cos t}dx$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-3/2x^2+6x-5$; $y=-x^2+6x-5$.

III. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p=134-x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

Задание №9

I. Вычислить

$$1.\int_{0}^{8}(3\sqrt{2x}-4\sqrt[3]{x})dx \qquad 2.\int_{0}^{2}\cos\frac{x}{4}dx \qquad 3.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}dx \qquad 4.\int_{0}^{-\frac{1}{2}}\frac{dx}{9+4x^2}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+6x-5$; y=0.

III. Скорость точки, движущейся прямолинейно задана уравнением: $\upsilon=3t^2-2t+5$. Вычислить ее путь за четвертую секунду.

Задание №10

I. Вычислить

$$1.\int_{0}^{4}(4\sqrt[3]{2x}-3\sqrt{x})dx \qquad 2.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{8\cos^2\frac{x}{3}} \qquad 3.\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{4\sin^2 x-3}{2\sin^2 x}dx \qquad 4.\int_{0}^{1}(2-e^x)^2dx$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-6x+9$; y=3x-9.

III. Вычислить работу, которую необходимо совершить, чтобы выкачать воду из резервуара, имеющего форму конуса (с вершиной внизу) с радиусом основания 2м и высотой 3м, наполненного доверху водой. Принять плотность воды 10^3 кг/м³.

Задание №11

I. Вычислить

1. $\int_0^8 (8\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{2x})dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sqrt{\sin x}\cos x dx$ 3. $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{2}{\cos^2 2x}dx$ 4. $\int_{\sqrt{2}}^{3} \frac{6x^2}{x^2 - 1}dx$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-8x+16$; $x+y-6=0$.
III. Скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $\upsilon=18t-6t^2$. Вычислить ее путь от начала движения до остановки.
Задание №12
I. Вычислить:

1. $\int_0^9 (4\sqrt[3]{3x} - 3\sqrt{x})dx$ 2. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{x}{2}dx$ 3. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{3\cos\frac{x}{3}}dx$ 4. $\int_0^1 \frac{(e^x - 8)^2}{3e^x}dx$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^2-4x+5$ и $x-y+5=0$
III. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за год (258 раб. дней), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t) = -0{,}0033t^2 - 0{,}089t + 20{,}96 \quad 0 \le t \le 8, \quad t - \textit{время в час}$
Задание №13.
I. Вычислить:

1. $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2(\frac{\pi}{6} + x)}$ 2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{1 + \sin t}dt$ 3. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + 2x}}$ 4. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{3 + 4x^2}$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+16$ и $y=0$
III. Управление спроса на некоторый товар имеет вид $p = 134 - x^2$. Найти выигрыш потребителей, если равновесная цена равна 70.

Задание №14.
I. Вычислить:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x}}$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4\cos x - 6)dx$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{4}{\cos^2 2x}dx$ 4. $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{du}{\sqrt{4 - 9u^2}}$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=-x^2+9$ и $y=0$
III. Скорость точки, движущейся прямолонейно, задана уравнением $V=24t-6t^2$. Вычислить ее путь от начала движения до остановки.
Задание №15.
I. Вычислить:

1. $\int_0^1 \sqrt{1 + 3x}dx$ 2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{8}} (\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2})^2 dx$ 3. $\int_1^2 \frac{(x - 1)^2}{x^2}dx$ 4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x}dx$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=x^3$, $y=2x$
III. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $x^2/a^2-y^2/b^2=1$ и $y=\pm b$ вокруг оси 0y.
Задание №16.

I. Вычислить:

$$1.\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin 2xdx}{\sqrt{2}\cos x} \qquad 2.\int_{-1}^{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3})dx \qquad 3.\int_1^9(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})dx \qquad 4.\int_1^e\frac{\ln xdx}{x}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $xy=a^2$, $x=a$, $x=2a$, $y=0$
III. Определить давление воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием 8м и высотой 6м.

Задание №17
I. Вычислить:

$$1.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{3-2ctg^2x}{\cos^{2x}}dx \qquad 2.\int_0^1\frac{x^2-4}{2-x}dx \qquad 3.\int_0^2(4-e^x)^2dx \qquad 4.\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^3}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x-4y+2=0$, $x+y-3=0$, $y=0$
III. Определить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями: $xy=4$, $x=1$, $x=4$, $y=0$ вокруг оси 0x.

Задание №18
I. Вычислить:

$$1.\int_0^1\sqrt[6]{1+2x}dx \qquad 2.\int_0^1 e^x(1+\frac{e^{-x}}{\cos^2 x})dx \qquad 3.\int_1^8\frac{x-\sqrt[3]{x}}{x}dx \qquad 4.\int_0^1\frac{x^2dx}{1+x^6}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $x-4y+2=0$, $x+y-3=0$, $y=0$
III. Уравнение спроса на некоторый товар имеет вид $p=\frac{100}{x+15}$ Найти выигрыш потребителей, если равновесное количество товара равно 10.

Задание №19
I. Вычислить:

$$1.\int_0^1(5e^x-3\sqrt{x})dx \qquad 2.\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\frac{x}{2}dx \qquad 3.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{1+\sin x} \qquad 4.\int_1^2\frac{2x^2+1}{x}dx$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=3-2x-x^2$; $y=0$.
III. Найти выигрыш потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:

$$p=186-x^2$$
$$p=20+\frac{11}{6}x$$

Задание №20
I. Вычислить

$$1.\int(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{x\sqrt{x}})dx \qquad 2.\int_0^1\frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}} \qquad 3.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{\sin^3 x} \qquad 4.\int_0^{\sqrt{2}}x\sin x^2dx$$

II. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной данными линиями: ху=4; х=1; х=4; у=0.
III. Сила в 6кг растягивает пружину на 8см. Вычислить работу силы по растягиванию пружины на 10см.
Задание №21
I. Вычислить

$$1.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \cdot \sin^2 x} dx \qquad 2.\int_{1}^{3} \frac{4-x^3}{x^2} dx \qquad 3.\int_{-1}^{2} \frac{2xdx}{(2x^2+1)^2} \qquad 4.\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (3+\cos x)^2 \sin x dx$$

II. Вычислить площадь ограниченную линиями: ху=4; х=1; х=4; у=0.
III. Тело движется по прямой со скоростью $\upsilon=(5t-t^2)$ м/с. Вычислите путь пройденный телом за 3-ю секунду.
Задание №22
I. Вычислить

$$1.\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx \qquad 2.\int \frac{x+1}{x^2-1} dx \qquad 3.\int_{0}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} \qquad 4.\int_{2\sqrt{2}}^{4} x\sqrt{x^2-7}dx$$

II. Вычислить площадь, ограниченную линиями: $y=x^2-1$; $y=3-x^2$.
III. Вычислить силу давления воды на одну из стенок сосуда, имеющего длину 0,6 м, а высоту 15 см.
Задание №23

$$1.\int_{-1}^{1} (4x^2+\frac{x}{2})dx \qquad 2.\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2xdx}{3\cos\ x} \qquad 3.\int_{0}^{\pi} (e^u-\cos u)du \qquad 4.\int_{0}^{4} z\sqrt{9+z^2}dz$$

I. Вычислить
II. Найти площадь фигуры ограниченной кривыми: $y=x^2$; $y+x^2-8=0$
III. Камень брошен с земли вертикально вверх. Найти наибольшую высоту подъема камня, если его скорость $\upsilon=98-9{,}8t$ (υ-в м/с).
Задание №24
I. Вычислить

$$1.\int_{2}^{4} \frac{u^2+2}{u^2} du \qquad 2.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{x\cos x+1}{x} dx \qquad 3.\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{tg^2 xdx}{\cos^2 x} \qquad 4.\int_{1}^{2} \sqrt{(x^2-1)^3}xdx$$

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=1/8x^3$; $y=2x$.
III. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,15 м. Сила в 30Н растягивает ее на 0,01 м. Какую работу надо совершить при растягивании пружины от 0,23 м до 0,25 м?
Задание №25
I. Вычислить

$$1.\int_{-2}^{1} (5-2x)^3 dx \qquad 2.\int_{0}^{-2} \frac{du}{\sqrt{(1-2u)^3}} \qquad 3.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin xdx}{(\cos x-1)^2} \qquad 4.\int_{0}^{0,4} \frac{5dx}{4+25x^2}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=6-x$ и $y=x^2+4$.
III. Два тела начинают движение одновременно из одной и той же точки: одно со скоростью $\upsilon_1=2t^3$, другое со скоростью $\upsilon_2=3t^2+8$ (υ_1 и υ_2 - в м/с). На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 10с, если они движутся в одном направлении и по одной прямой?
Задание №26
I. Вычислить

$$1.\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{3-2x}} \qquad 2.\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2zdz}{\sin^2 z} \qquad 54\ 3.\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{9}} \frac{du}{6\cos^2 3u} \qquad 4.\int_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$$

II. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями: $y^2=9x$ и $y=3x$.

III. Вычислите работу, которую необходимо совершить для выкачивания воды, наполняющей цилиндрический резервуар с высотой H=50 см и радиусом основания R=30 см.

Задание №27

I. Вычислить

$1.\int_0^1 \cos\frac{2\pi t}{T}dt \qquad 2.\int_0^7 \frac{du}{\sqrt[3]{(u-8)^2}} \qquad 3.\int_1^3 (1+2u^2)^2\,du \qquad 4.\int_0^1 \frac{zdz}{z^4+1}$

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $4y=x+2$; $y=3-x$ и осью Ох.

III. Для сжатия пружины на 3 см необходимо совершить работу в 16 Дж. На сколько можно сжать пружину, совершив работу в 144 Дж?

Задание №28

$1.\int_1^4 \frac{\sqrt{x}+1}{x^2}dx \qquad 2.\int_{-1}^1 \frac{x^2dx}{2x^3+3} \qquad 3.\int_{\frac{3}{2}}^3 \frac{dz}{\sqrt{9-z^2}} \qquad 4.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{3})dx$

I. Вычислить

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2=25x$ и прямыми $x=2$ и $x=5$.

III. Найти объем продукции, выпущенной предприятием за I квартал (63 раб. дня), если ежедневная производительность этого предприятия задана функцией $f(t)=-0{,}0033t^2-0{,}089t+20{,}96 \quad 0\le t\le 8, \quad t-\textit{время в час}$

Задание №29

I. Вычислить

$1.\int_{-2}^2 (3x-2)^2dx \qquad 2.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin xdx}{\sqrt{3\cos x+1}} \qquad 3.\int_{-1}^2 \frac{xdx}{(x^2+1)^2} \qquad 4.\int_0^1 x^2e^{x^3}dx$

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x$, $4y-x^3=0$.

III. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной данными линиями: $x-2y=0$; $x=0$; $x=10$; $y=0$.

Задание №30

I. Вычислить:

$1.\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+1)^2}} \qquad 2.\int_1^9 \frac{(4-3x)^2}{\sqrt{x}}dx \qquad 3.\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^2 xdx}{(1+\cos x)} \qquad 4.\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx$

II. Вычислить площадь фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x^2$, $y=3-2x$.

III. Найти выигрыш потребителей и поставщиков в предложении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид:

$$p=186-x^2$$
$$p=20+\frac{11}{6}x$$

Тема 7: Площадь поверхности и объём многогранников.

1.Призма: основные понятия, свойства. S пов и V.

1.1 Определение: Призмой называется многогранник, две грани которого параллельны, а остальные грани пересекаются по параллельным прямым.

1.2 Теорема: Основаниями призмы являются равные многоугольники с соответственно параллельными сторонами, а боковые грани призмы – параллелограммы.

1.3 Основные понятия:

Грани-части плоскостей образующих призму.

Ребра-прямые, по которым пересекаются смежные грани.

Вершины-точки, в которых сходятся смежные грани.

Диагонали – часть прямой, которая проходит через вершины, не лежащие на одной грани.

Высота – перпендикуляр, опущенный из вершины на основание призмы.

1.4 Виды призм: Призма называется треугольной, четырёхугольной и т.д. в зависимости от того, какой многоугольник служит основанием призмы.

Призма называется прямой, если её боковые рёбра перпендикулярны к плоскости её основания, в противном случае призма называется наклонной.

Прямая призма, основаниями которой служат правильные многоугольники, называется правильной призмой.

1.5 Параллелепипед.

Определение: Параллелепипедом называется призма, основаниями которой служат параллелограммы.

Виды параллелепипедов: прямой, наклонный, прямоугольный.

Прямоугольным параллелепипедом называется прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники. В прямоугольном параллелепипеде все грани прямоугольники.

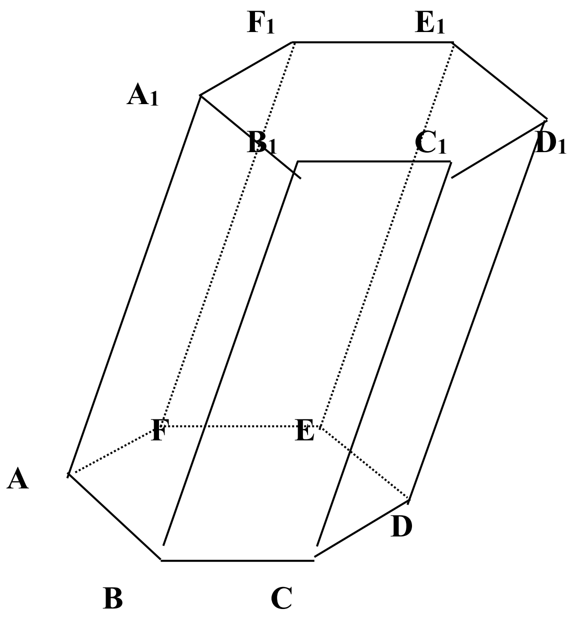
Длина трёх рёбер прямоугольного параллелепипеда, сходящиеся в одной вершине, называются его измерениями.

Кубом называется прямоугольный параллелепипед, где все три измерения равны между собой.

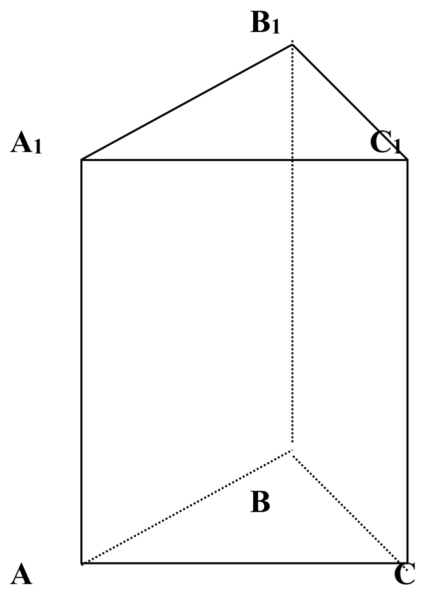
Свойства параллелепипеда:

Теорема 1: В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.

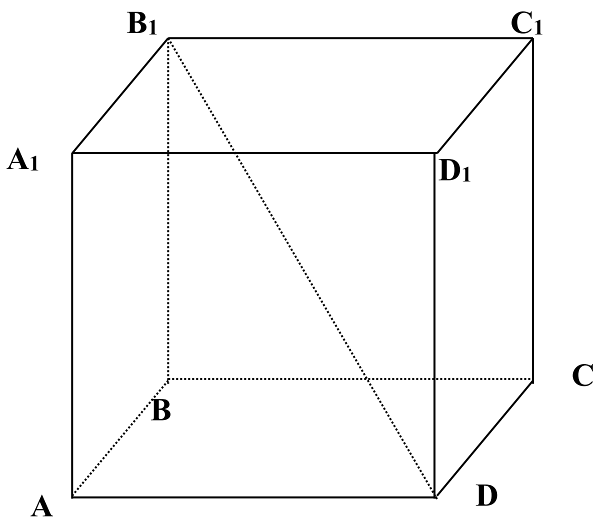
Теорема 2: Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.



AE_1-наклонная призма



$ABCA_1B_1C_1$-прямая призма



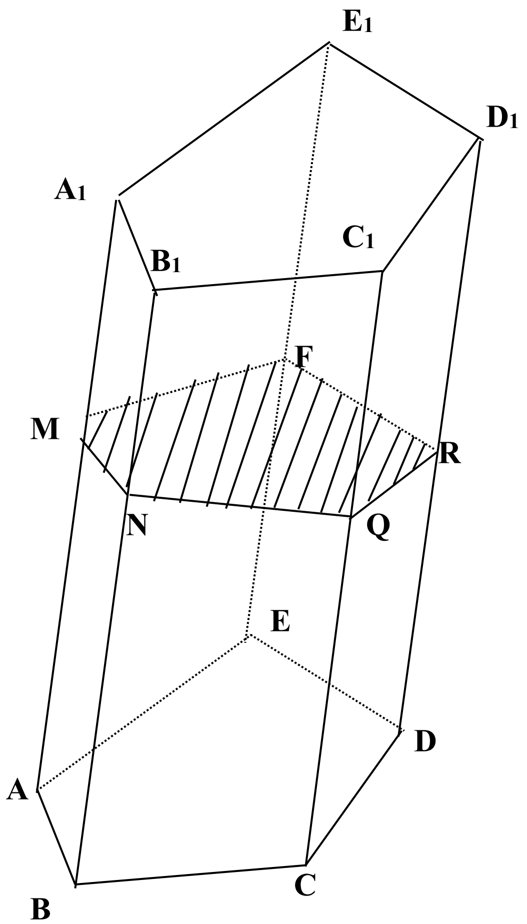
AC_1- прямоугольный параллелепипед

1.6 Площадь поверхности призмы.

Поверхность призмы: Поверхностью призмы называется сумма площадей всех её граней. Боковой поверхностью призмы называется сумма площадей всех её боковых граней.

$$S_{полное}=S_{бок}+2S_{осн}.$$

Теорема: Боковая поверхность призмы равна произведению её бокового ребра на периметр перпендикулярного сечения.



Дано: AD_1 – призма

MNQRL – перпендикулярное сечение.

Доказать:Sбок.=P⊥ сеч.∗l

Доказательство: каждая боковая грань призмы – параллелограмм. Примем за основание этого параллелограмма боковое ребро призмы. Тогда высотою каждого такого параллелограмма будет соответствующая сторона перпендикулярного сечения. Площадь каждой грани равна произведению основания ∗ l

S AA_1B_1B= l ∗LM

S BB_1C_1C= l ∗MN

S CC_1D_1D= l ∗NQ

Боковая поверхность призмы равна сумме площадей параллелограммов, а потому:

S= l ∗FM+ l ∗MN+ l ∗NQ+ l ∗QR+ l ∗RF

или

S= l (FM+MN+NQ+QR+RF)

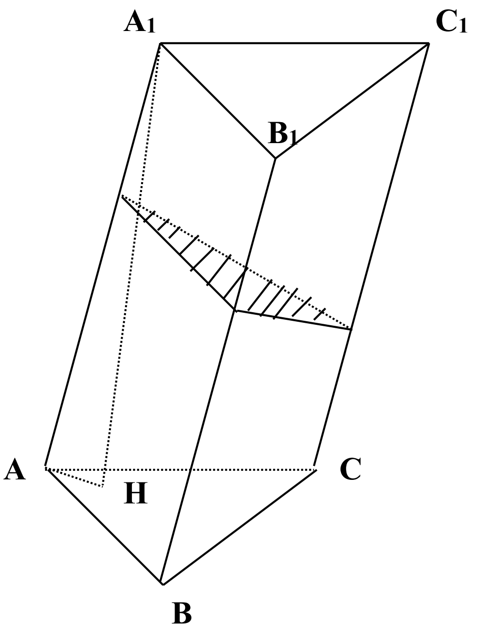
Sбок. призмы.= ***l* P⊥ сеч**

Следствие: Боковая поверхность прямой призмы равна произведению периметра её основания на высоту.

Sбок =P·H

1.7 Объём призмы

Теорема: Объём призмы равен произведению площади её основания на высоту.



Дано: призма, Sосн.,H

Доказать: V=Sосн.∗H

Доказательство:

Vтела=$\int_a^b g(x)dx$, где $g(x)$ – площадь по перечного сечения. Плоскость поперечного сечения параллельна плоскости основания =>g(x)=Sосн.

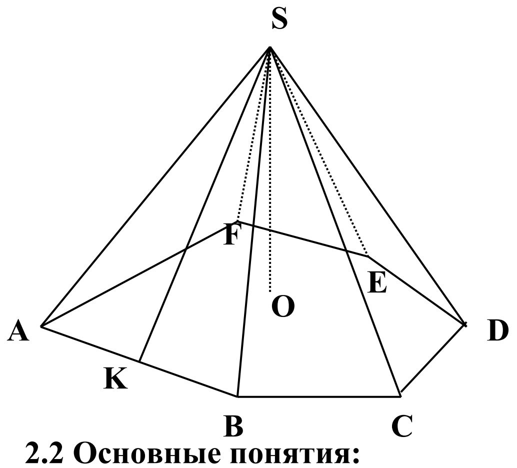
$$V = \int_o^h Socн * dx = Socн * x\Big|_o^h = Socн * H$$

Vтела=Sосн.·H

2. Пирамида: основные понятия, свойства. S пов. и V.

2.1 Определение:

Пирамидой называется многогранник, ограниченный гранями многогранного угла и плоскостью, пересекающей все его грани.



Дано: ABCDEF – основание
SA,SB,SC,SD,SE,SF – боковые рёбра,
SO – высота, SK – апофема

2.2 Основные понятия:

Основанием пирамиды называется многоугольник, полученный в секущей плоскости.

Боковыми гранями пирамиды называются треугольники с общей вершиной S, называемой вершиной пирамиды.

Боковыми рёбрами пирамиды называются рёбра, по которым пересекаются боковые грани, т.е. рёбра SA, SB …, выходящие из вершины пирамиды.

Высотой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость её основания.

Апофемой правильной пирамиды называется высота боковой грани, опущенная из вершины пирамиды.

2.3 Виды пирамид: правильная, неправильная, треугольная, четырёхугольная и т.д.

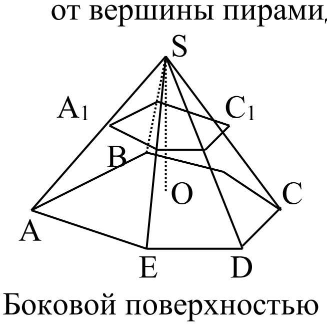
Правильной пирамидой называется пирамида, основанием которой служит правильный многоугольник и высота которой проходит через центр этого многоугольника.

Тетраэдр – это правильная треугольная пирамида, боковое ребро которой равно основанию.

2.4 Свойства параллельных сечений в пирамиде.

Теорема: Если пересечь пирамиду плоскостью, параллельной основанию, то:

1. Боковые рёбра и высота пирамиды разделяются этой плоскостью на пропорциональные части.
2. В сечении получится многоугольник, подобный основанию.
3. Площади сечения и основания будут относится между собой, как квадраты их расстояний от вершины пирамиды.



Дано: ABCDE - основание
SO - высота

Боковой поверхностью полной пирамиды называется сумма площадей их боковых граней.

Полной поверхностью пирамиды называется сумма площадей ее боковой поверхности и площади основания.

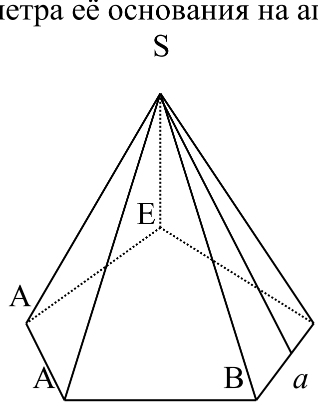
2.5 Площадь поверхности пирамиды.

Sполное=Sбоковое+Sоснования

Правильная пирамида: Sбоковое=$P*\frac{l}{2}$, P-периметр, l-апофема.

Неправильная пирамида: Sбоковое= $\sum$ площадей боковых граней.

Теорема: Боковая поверхность правильной пирамиды равна половине произведения периметра её основания на апофему.



Дано: A SABCDE – правильная пирамида
l – апофема
a - сторона основания

Доказать: Sбок=Pосн*$\frac{l}{2}$

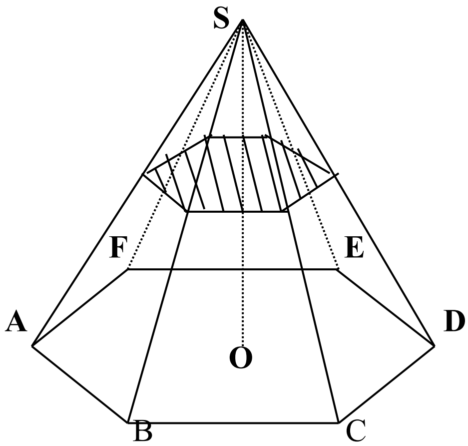
SABS=$a*\frac{l}{2}$

Sбок=n*SASn=n*$a*\frac{l}{2}$=P*$\frac{l}{2}$

Sбок=P *$\frac{l}{2}$

2.6 Объём пирамиды.

Теорема: Объём пирамиды равен $\frac{1}{3}$ произведения S основания на высоту.



Дано: пирамида
S – основание, SO - высота

Доказать: $V=\frac{1}{3}S_{осн}H$

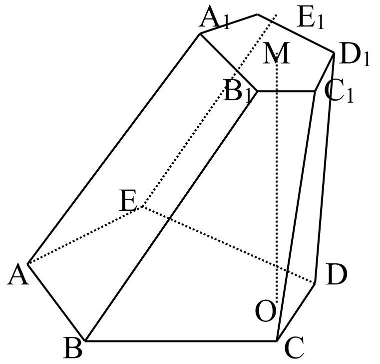
Доказательство: Vтела=$\int_b^a g(x)dx$, где $g(x)$ - S поперечного сечения. Плоскость $g(x)$ || плоскости основания =>$\frac{g(x)}{S_{осн}}=\frac{x^2}{H^2}$ --- свойство || сечений пирамиде=> $g(x)=\frac{Sосн*x^2}{H^2}$

Vпир=$\int_O^H \frac{Sосн\cdot x^2}{x^2}dx=\frac{Sосн}{H^2}*\frac{x^3}{3}\Big|_O^H=\frac{Sосн}{\cancel{H^2}}*\frac{\cancel{H^3}}{3} = \frac{1}{3}Sосн*H$

$$\boxed{\text{Vпир}=\frac{1}{3}Sосн*H}$$

3. Усечённая пирамида: определение, основные понятия, виды.

3.1 Определение: Усечённой пирамидой называется часть пирамиды, заключённая между её основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.



ABCDE – нижнее основание
$A_1B_1C_1D_1E_1$ – верхнее основание
AA_1, BB_1, CC_1 - рёбра
OM - высота
апофема, грани, диагонали

Основаниями усечённой пирамиды называются её параллельные грани.
Высотой усечённой пирамиды называется перпендикуляр, опущенный из какой-нибудь точки верхнего основания на нижнее.
Апофема – высота боковой грани.
Виды: правильная, неправильная, трёхугольная, четырёхугольная, и т.д.

3.2 Площадь поверхности усеченной пирамиды:

Sполное=Sбок+Sн.осн.+Sв.осн.

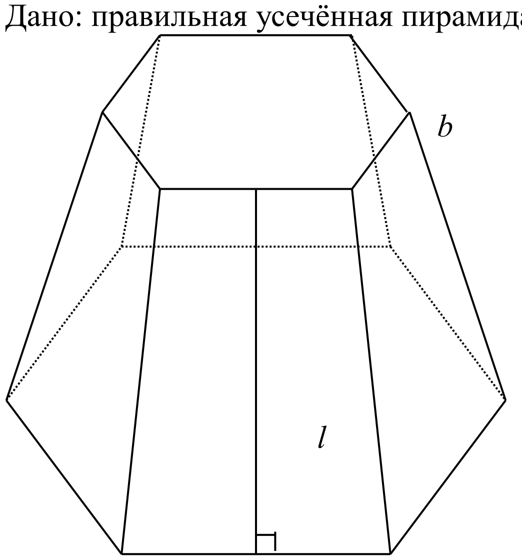
Sбок.прав.ус.пир.=$\frac{P+p}{2} * l$

P – периметр нижнего основания
P – периметр верхнего основания
l - апофема

Sбоковое неправильной усечённой пирамиды=сумма площадей её боковых граней.
Теорема: Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров её основания на апофему.

$$\boxed{\text{Sбок.ус.пир.}=\frac{P+p}{2} * l}$$

Дано: правильная усечённая пирамида



a – сторона н.осн. P – периметр н.осн.
b – сторона в.осн. p – периметр в.осн.
l - апофема

Доказать: $Sбок = \frac{P+p}{2} * l$

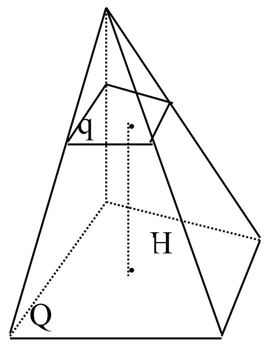
Доказательство: Каждая грань боковой поверхности правильной усечённой пирамиды – равнобедренная трапеция, площадь которой равна $\frac{a+b}{2} * l$.
Боковая поверхность правильной усечённой пирамиды состоит из n таких трапеций,

a следовательно, равна

$\frac{a+b}{2} l, или \frac{na+nb}{2} l$ Так как na=P и nb=p, то $\boxed{\text{Sбок.ус.пир.}=\frac{P+p}{2} l}$

3.3 Объём усечённой пирамиды:

Теорема: Объём усечённой пирамиды равен $V = \frac{1}{3}H\left(S\text{н} + S\text{б} + \sqrt{S\text{н} * S\text{б}}\right)$



Дано: усеченная пирамида
$S_н$=Q
$S_в$=g
высота H
Доказать: $V = \frac{H}{3}\left(Q + q + \sqrt{Qq}\right)$.
Доказательство:

Объём усечённой пирамиды равен разности между объёмом полной пирамиды и объёмом пирамиды, дополняющеё усечённую пирамиду до полной,

$$V = \frac{1}{3}Q(H + h) - \frac{1}{3}qh$$

где h высота дополнительной пирамиды, применяя свойство параллельных сечений в пирамиде, выразим h через q, Q через H:

$$\frac{Q}{q} = \frac{(H + h)}{h} \quad \text{или} \quad \frac{Q}{q} = \frac{H + h}{h}$$

применив свойство пропорции, получим

$$\frac{Q - q}{q} = \frac{H}{h}, \text{ откуда } h = \frac{Hq}{Q - q}$$

Представим значение h в равенство и упростив, получим $\boxed{V = \frac{H}{3}\left(Q + q + \sqrt{Qq}\right)}$

Тема 8: Круглые тела. Площадь поверхности и объём.

$$S_{пов} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$ - вращ. вокруг оси Ox

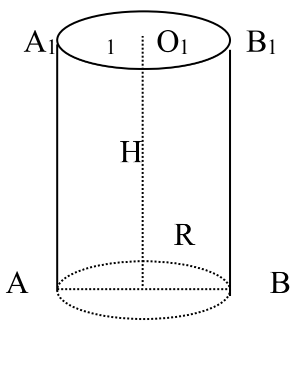
$$V = \pi\int_a^b y^2 dx$$ - вокруг Ox

1. Цилиндр. Площадь поверхности и объём.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, образованная прямой линией, называемой образующей, которая перемещается, оставаясь во всё время движения параллельной заданной прямой.

Цилиндрическая поверхность определена, если дано:
- направление образующей
- кривая линия, которую образующая при своём непрерывном перемещении постоянно пересекает; эта линия называется направляющей.

Прямой круговой цилиндр- это тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и частями секущих плоскостей (кругами).

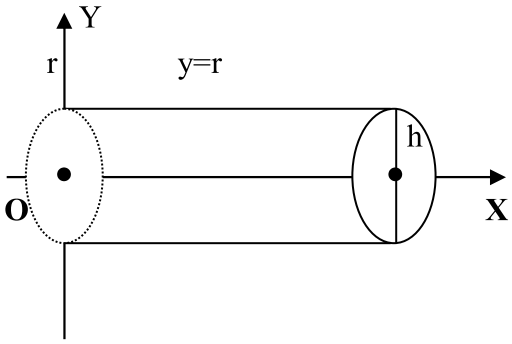


Основные понятия:
направляющая – линия окружности
образующая – высота H
основания, R,d, хорда, ось цилиндра – O_1O

Сечение цилиндра плоскостью параллельной основанию – круг.
Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра – прямоугольник.
Площадь поверхности цилиндра.

y=r, $\Rightarrow S_{пов} = 2\pi\int_0^h r\sqrt{1+0^2}\,dx = 2\pi r x\Big|_0^h = 2\pi r h$

$$\boxed{S = 2\pi r h\,,\ \ S_{полн} = 2\pi r h + 2\pi r^2}$$



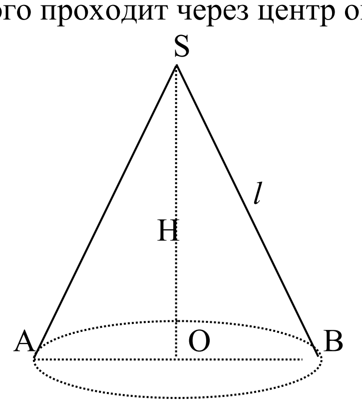
Объём цилиндра.

$V = \pi\int_0^h r^2 dx = \pi r^2 x\Big|_0^h = \pi r^2 h$

$$\boxed{V_{цил} = \pi r^2 h}$$

2. Конус. Площадь поверхности и объём.

Конической поверхностью называется поверхность, образованная движением прямой линии (называемой образующей этой поверхности), которая перемещается, проходя постоянно через неподвижную точку (называемой вершиной поверхности).
Направляющей линией конической поверхности называется линия, которую образующая при своём движении постоянно пересекает.
Прямым круговым конусом называется конус, основанием которого является круг и высота которого проходит через центр окружности основания.



Основные понятия:
направляющая – линия окружности
образующая - l
высота - H
основание, R, d, хорда основания

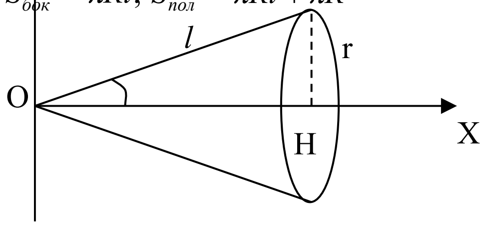
Сечение конуса плоскостью, параллельной основанию - круг.
Сечение конуса плоскостью проходящей через ось конуса – равнобедренный треугольник.

Площадь поверхности и объём конуса.

$y=kx,\ k=tg\alpha=\dfrac{R}{H};\ y=\dfrac{R}{H}x$, тогда

$$S_п \quad \pi\int_0^H \frac{R}{H}x\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}}dx = 2\pi\frac{R}{H}\int_0^H x\sqrt{\frac{R^2+H^2}{H^2}}dx = 2\pi\frac{R}{H}\frac{l}{H}\frac{x^2}{2}\Bigg|_0^H = \pi Rl$$

$S_{бок} = \pi Rl,\ S_{пол} = \pi Rl + \pi R^2$

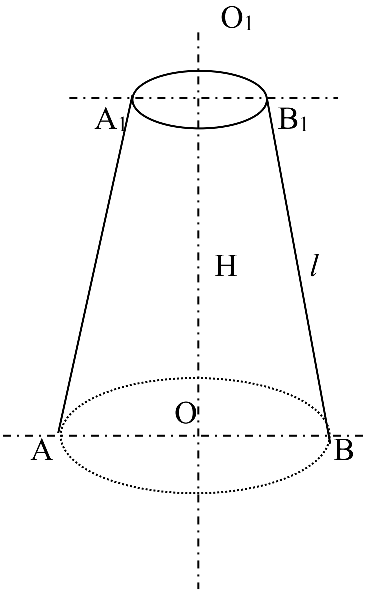


$$V = \pi\int_o^h\left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{1}{3}\pi\frac{R^2H^3}{H^2} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 H}$$

3. Усечённый конус. Площадь поверхности и объём.

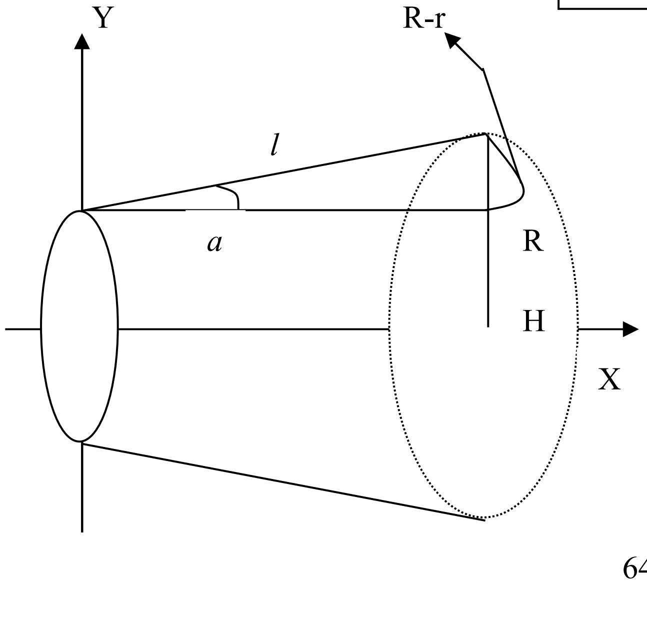
Усечённым конусом называется часть конуса, заключённая между его основанием и секущей плоскостью, параллельной основанию.



Основные понятия:
образующая - *l*
высота - H
R, r, d, хорда,
основания: нижнее и верхнее

Площадь поверхности и объём.

$$\boxed{S_{полн}\pi l(R+r)+\pi R^2+\pi r^2}$$



$$y = kx + b \quad образующая$$

$$y = \frac{R-r}{h}x + r$$

$$S_{пов}2\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)\sqrt{1+\left(\frac{R-r}{H}\right)^2}dx = 2\pi\frac{l}{H}\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)dx =$$

$$=2\pi\frac{l}{H}\left(\frac{R-r}{H}\frac{x^2}{2}+rx\right)\Bigg|_0^H = 2\pi\frac{1}{H}\left(\frac{R-r}{H}\frac{H^2}{2}+rH\right) = 2\pi\frac{l}{H}\frac{H}{2}\left(R+r\right) =$$

$$=\pi l\left(R+r\right),$$

$$\boxed{S_{бок}\pi l\left(R+r\right)}$$

$$V=\pi\int_0^H\left(\frac{R-r}{H}x+r\right)^2dx = \left[\begin{array}{l}\frac{R-r}{H}x+r=t\\ dt=\frac{R-r}{H}dx\\ dx=\frac{Hdt}{R-r}\\ н.п.=r, в.п.=R\end{array}\right] = \pi\int_r^R\frac{Ht^2}{R-r}dt = \pi\frac{H}{R-r}\frac{t^3}{3}\Bigg|_r^R =$$

$$=\frac{1}{3}\pi\frac{H}{R-r}\left(R^3-r^3\right) = \frac{1}{3}\pi\frac{H}{R-r}\left(R-r\right)\left(R^2+Rr+r^2\right) = \frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)$$

$$\boxed{V_{ус.кон.}\frac{1}{3}\pi H\left(R^2+Rr+r^2\right)}$$

4. Шар. Площадь поверхности и объем.

Определение: Шар – геометрическое место точек пространства, равноудалённых от одной точки, называемой центром шара.

Основные понятия: радиус, диаметр, хорда, центр шара.

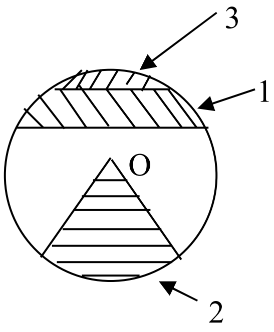
Свойства: **-** Сечение шара любой плоскостью есть окружность.

- Касательная плоскость перпендикулярна к радиусу шара в его конце.

Части шара: Шаровым сегментом называется тело, отсекаемое от шара плоскостью.

Шаровым слоем называется тело, отсекаемое от шара двумя параллельными плоскостями.

Шаровым сектором называется тело, полученное вращением кругового сектора вокруг оси, проходящей через его центр.



1. Шаровой слой.
2. Шаровой сектор.
3. Шаровой сегмент.

Площадь поверхности: $\boxed{x^2+y^2=R^2}$ уравнение окружности

$$S=2\pi\int_{-R}^{R}y\sqrt{1+(y')^2}dx \qquad 2x+2y*y'=0 \qquad y'=-\frac{x}{y}$$

$$\sqrt{1+\left(y'\right)^2} = \sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2} = \sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}} = \sqrt{\frac{R^2}{y^2}} = \frac{R}{y}$$

$$\boxed{S_{шара}=4\pi R^2}$$

$$S_{шара} = 2*2\pi\int_0^R y*\frac{R}{y}dx = 4\pi*Rx\Big|_0^R = 4\pi R^2$$

Объём шара:

$$V_{тела} = \pi\int_{-R}^{R} y^2dx = 2\pi\int_0^R \left(R^2 - x^2\right)dx = 2\pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^R = 2\pi\left(R^3 - \frac{1}{3}R^3\right) =$$

$$= 2\pi\frac{2}{3}R^3 = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\boxed{V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

5.Обязательный минимум задач по стереометрии по теме: “Площадь поверхности и объём геометрических тел”.

Призма.

1. Найти полную поверхность и объём прямого параллелепипеда, основанием которого служит ромб, диагонали ромба равны 12 *дм* и 14 *дм*, а высота параллелепипеда 6 *дм*.

2. Найти полную поверхность и объём прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны 20 *см*, 15 *см* и 16 *см*.

3. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна 1 *м*, а основание 1 *м* 20 *см*. Боковое ребро призмы равно высоте основания опущенной на его боковую сторону. Найти полную поверхность и объём призмы.

4. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 *м* и 8 *м* и образуют угол в 30°; боковое ребро равно 5 *м*. Определить полную поверхность и объём этого параллелепипеда.

5. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 6 *см* и 14 *см* и образуют угол в 45°; меньшая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол в 60°. Определить полную поверхность и объём этого параллелепипеда.

6. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 *см* и 8 *см*; угол между ними содержит 60°. Боковая поверхность параллелепипеда равна 220 *см*. Определить полную поверхность и площадь меньшего диагонального сечения, объем призмы.

7. Надо из железа (удельный вес 7,8 $г/см^3$) изготовить куб весом в 0,975 *кг*. Найти длину его ребра.

8. Найти вес куска полосового железа, длина которого 130 *см*, ширина 140 *мм* и толщина 6 *мм* (удельный вес железа 7,8 $г/см^3$).

Пирамида.

1. Основанием пирамиды служит квадрат, а высота её проходит через одну из вершин основания. Найти полную поверхность и объём этой пирамиды, если сторона её основания равна 7 *дм*, а высота пирамиды равна 24 *дм*.

2. Основанием пирамиды служит ромб с диагоналями 12 *см* и 16 *см*; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна 6,4 *см*. Найти полную поверхность и объём этой пирамиды.

3. По стороне основания a и высоте h определить полную поверхность и объём правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

4. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 9 *см* и 12 *см*; каждое из боковых рёбер равно 12,5 *м*. Найти объём пирамиды.

5. Основанием пирамиды служит прямоугольник со сторонами в 6 *см* и 15 *см*, высота проходит через точку пересечения диагоналей основания, и боковая поверхность равна 126 *см*. Определить объём этой пирамиды.

6. По стороне основания a и боковому ребру b определить полную поверхность и объём правильной пирамиды: 1) треугольной; 2) четырёхугольной; 3) шестиугольной.

7. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого равные стороны содержат по 39 *см*, а третья сторона 30 *см*. Двугранные углы при основании равны между собой, и каждый содержит 45°. Определить объём и $S_{пов}$ этой пирамиды,
8. Чугунный постамент имеет вид правильной четырёхугольной усечённой пирамиды высотой 1,5 *м*. Стороны оснований 3 *м* и 2 *м*. Найти вес постамента (уд. вес чугуна 7,2 *г/см³*).
9. Найти полную поверхность и объём правильной четырёхугольной усечённой пирамиды, стороны оснований которой 8 *дм* и 6 *дм* и боковая грань наклонена к большему основанию под углом 60°.

Цилиндр.

1. Требуется изготовить из листового материала сосуд цилиндрической формы (без крышки). Сколько материала пойдёт на изготовление этого сосуда (не принимая во внимание швов и обрезков)? Диаметр сосуда должен быть 24 *см* и высота 35 *см.*
2. Сколько килограммов весят 15 *м* цилиндрической дымоходной трубы диаметром в 40 *см*, изготовленной из листового железа, 1 $м^2$ которого весит 7 *кг*? При подсчёте прибавляют на шов 8% поверхности.
3. Цилиндрический паровой котёл имеет в диаметре 1,2 *м*; длина его равна 4,4*м*. Как велика сила давления пара на полную поверхность котла, если величина давления пара равна 8 $кг/см^2$?
4. Найти вес круглого железного стержня, диаметр сечения которого 20 *мм*, если длина его равна 1,75 *м* (удельный вес железа 7,8 $г/см^3$). Результат получить с точностью до 10 г.
5. Диаметр цилиндра паровой машины равен 330 *мм*; ход поршня 406 *мм*. Найти объём рабочей части цилиндра (с точностью до 0,1 $дм^3$)
6. Чугунная труба (удельный вес чугуна 7,2 $г/см^3$) с толщиной стенок в 5 *мм* имеет внутренний диаметр 75 *мм*. Найти вес трубы длиной в 3 *м*.
7. 25 *м* медной проволоки весит 100,7 *г*. Найти диаметр проволоки. (уд. вес меди 8,9 $г/см^3$)

Конус.

1. Конусообразная палатка высотой в 3,5 *м* и с диаметром основания в 4 *м* покрыта парусиной. Сколько квадратных метров парусины пошло на палатку?
2. 122-миллиметровая бомба даёт при взрыве воронку диаметром в 4 *м* и глубиной в 1,5 *м*. Какое количество земли (по весу) выбрасывает эта бомба? 1 $м^3$ земли весит 1650 *кг*.
3. Надо перевезти 20 одинаковых куч песка. Окружность основания каждой кучи 9,5*м*; высота кучи 2 *м*. Вес одного кубического метра песка равен 1,5 *т*. Сколько требуется для этой перевозки трёхтонных машин?
4. Из куска меди (удельный вес 8,8 $г/см^3$) весом в 24 *кг* требуется отлить конус с радиусом основания 10 *см*. Найти (с точностью до 1 *мм*) высоту конуса.
5. Прямоугольный треугольник, катеты которого 12 *см* и 16 *см,* вращается вокруг гипотенузы. Найти поверхность и объём тела вращения.

6. Треугольник со сторонами 13 *см*, 14 *см* и 15 *см* вращается вокруг стороны в 14 *см*. Найти поверхность и объём тела вращения.
7. Радиусы оснований усечённого конуса 20 *см* и 10 *см*. Образующая наклонена к плоскости основания под углом в 30°. Найти Sпов и объем конуса.
8. Параллелограмм со сторонами, равными 27 *см* и 12 *см*, и острым углом в 60° вращается вокруг оси, перпендикулярной к большей стороне и проходящей через вершину острого угла . Найти поверхность и объём тела вращения.

Шар.

1. Сколько метров шелковой материи шириной в 0,5 *м* потребуется для изготовления воздушного шара, если диаметр шара равен 6 *м*, а на швы и обрезки следует набавить 12,5%?
2. Внешний диаметр полого чугунного шара равен 2 *дм*, толщина стенок 2 *см*. найти вес шара (с точностью до 0,01 *кг*), считая удельный вес чугуна равным 7,25 $г/см^3$.
3. Какое число шариков диаметром в 3 *см* получится, если перелить в них свинцовый шар диаметром в 30 *см*?

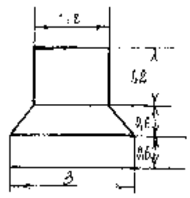
4. Требуется перелить в один шар два чугунных шара с диаметрами d_1=25 *см* и d_2=35 *см*. Найти диаметр нового шара. (Угар во внимание не принимается).
5. Радиусы трёх шаров: 3 *см*, 4*см* и 5 *см*. Определить радиус шара, объём которого равен сумме их объёмов.
6. Поверхность шара равна $225\,\pi\, м^2$. Определить его объем.
7. По объёму шара V определить его поверхность.
8. Кусок металла, имевший сначала форму равностороннего цилиндра, перелит в форму шара. Как изменилась величина его поверхности и объем?
9. Из деревянного цилиндра, в котором высота равна диаметру основания (равносторонний цилиндр), выточен наибольший шар. Определить, сколько процентов материала сточено.

Практическая работа по теме: «Круглые тела. Sпов и V».

Задача № 1
Теплообменный аппарат имеет форму цилиндра с коническим днищем. Радиус основания аппарата 3,75 м, высота аппарата 6 м, высота цилиндрической части 3,3 м.
Найти вместимость теплообменного аппарата.
Задача № 2
На ГЭС вырыт котлован, имеющий форму усеченного конуса, у которого диаметр верхнего основания равен 20 м, а высота равна 2 м. Сколько кубометров земли вынуто, если берег водоема, образует с горизонтом угол в 30°?
Задача № 3
Крыша водонапорной башни имеет форму конуса. Диаметр башни равен 6 м, высота 3 м. Сколько листов кровельного железа размерами 1,4 м Х 0,7 м необходимо для покрытия крыши, если расходы на швы составляют 10% требующегося железа?
Задача № 4
Конический сосуд с высотой 12 дм и диаметром 8 дм наполнен жидкостью. Эта жидкость перелита в цилиндрический сосуд диаметром 6 дм. Каким окажется уровень жидкости в цилиндре?
Задача № 5
Требуется покрасить наружную поверхность 200 ведер, имеющих форму конуса с диаметром 26 см и 16 см и образующей 28 см. Сколько потребуется краски, на 1 м^2 расходуется 200 г.?

Задача № 6
Стальной вал, имеющий длину 70 см и диаметр 8,3 см обтачивается на токарном станке, причем диаметр его уменьшается на 0,3 см.
На сколько кг уменьшится масса вала, если р = 7400 кг/м^3 ?

Задача №7
Найти вместимость сосуда (м^3):



6.Задания для самостоятельной работы по теме: «Круглые тела. Sпов и V».

1. В равнобедренной трапеции основания равны 15см и 9 см, боковая сторона 5см. Трапеция вращается вокруг оси, проходящей через конец большего основания перпендикулярно к нему. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.
2. Ромб со стороной а и острым углом 60° вращается вокруг оси, проходящей через вершину острого угла ромба перпендикулярно его диагонали. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.
3. Правильный шестиугольник со стороной а вращается вокруг своей стороны. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.

4. Квадрат со стороной а вращается вокруг внешней оси, которая параллельна диагоналям квадрата и проходит через его вершину. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

5. Равнобедренная трапеция, основания которой 7см и 9см и острый угол 60°, вращается вокруг оси, перпендикулярной основаниям и проходящей через вершину острого угла. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

6. Параллелограм со сторонами равными 8см и 10см и острым углом 30° вращается вокруг оси перпендикулярной к большей стороне и проходящей через вершину острого угла. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

7. Прямоугольный треугольник с гипотенузой равной 10см и острым углом 60° вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельного гипотенузе. Найти $S_{пов}$ и V полученного тела.

8. Ромб со стороной 7см и острым углом 60° вращается вокруг прямой, проведенной через вершину острого угла перпендикулярно его стороне. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.

9. Ромб со стороной а и острым углом 45° вращается вокруг оси, проведенной через вершину угла перпендикулярно к меньшей диагонали. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

10. Равнобедренная трапеция, у которой острый угол равен 45° и боковая сторона равна меньшему основанию, вращается вокруг боковой стороны. По ее длине а найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

11. Правильный шестиугольник со стороной а вращается вокруг оси, проходящей через его вершину перпендикуляярно к радиусу, проведенному в эту вершину. Найти $S_{пов}$ и V полученного тела.

12. Правильный шестиугольник со стороной а вращается вокруг внешней оси, которая параллельна стороне и отстоит от нее на длину апофемы. Найти $S_{пов}$ и V полученного тела.

13. Квадрат со стороной а вращается вокруг перпендикуляра к диагонали, проведенного через ее конец. Найти $S_{пов}$ и V полученного тела.

14. Равносторонний треугольник вращается вокруг перпендикуляра к стороне, проведенного через ее конец. Как относятся между собой поверхности, описываемые сторонами треугольника?

15. Одна из сторон а равностороннего треугольника продолжена на равную ей длину, и через конец продолжения проведен перпендикуляр к нему. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$ если вращать треугольник вокруг этого перпендикуляра.

16. Высота равностороннего треугольника продолжена за вершину на свою длину, и через конец продолжения проведен перпендикуляр к нему. По стороне ***а*** найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$, образуемого вращением треугольника вокруг этого перпендикуляра.

17. Треугольник со сторонами 9см, 10см и 17см вращается вокруг высоты,проведенной из вершины его меньшего угла. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

18. Треугольник со сторонами 8см и 5см, заключающими угол в 60°, вращается вокруг оси, проходящей через вершину этого угла перпендикулярно к меньшей из его сторон. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

19. Прямоугольный треугольник с катетами 5см и 12см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна большему катету и отстоит от него на 3см. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

20. Прямоугольный треугольник с катетами 15см и 20см вращается вокруг перпендикуляра к гипотенузе, проведенного через вершину большего острого угла. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

21. Прямоугольный треугольник с катетами 6см и прилежащим углом 60° вращается вокруг оси, проходящей через вершину угла параллельно высоте, опущенной на гипотенузу. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

22. Прямоугольный треугольник с катетами 4см и 3см вращается вокруг гипотенузы. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

23. Равнобедренный треугольник, основание которого 6см, а угол при основании 45° вращается вокруг боковой стороны. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

24. Прямоугольный треугольник с катетом 10см и прилежащим углом 30° вращается вокруг оси, проходящей через вершину угла перпендикулярно гипотенузе. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

25. Равнобедренный треугольник основание которого 16см и боковая сторона 10см вращается вокруг боковой стороны. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

26. Прямоугольный треугольник с гипотенузой 4см и острым углом 60° вращается вокруг гипотенузы. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

27. Равнобедренный треугольник, основание которого 14см, а угол при основании 30°, вращается вокруг боковой стороны. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

28. Прямоугольный треугольник с гипотенузой равной 14см и острым углом 30° вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.

29. Равносторонний треугольник со стороной 7см вращается вокруг оси, параллельной стороне треугольника и отстоящей от него на 2см. Найти $S_{пов}$ и $V_{тела}$.

30. Прямоугольный треугольник с катетами 3см и 5см вращается вокруг внешней оси, которая параллельна гипотенузе и отстоит от нее на 1см. Найти $S_{пов}$ и V тела вращения.

Тема 9: Комбинаторика. Основные понятия теории вероятности.

1. Комбинаторика.

Задачи, в которых производится подсчет всех возможных различных комбинаций, составленных из конечного числа элементов по некоторому правилу, называется комбинаторными.

Раздел математики, занимающийся их решением, называется комбинаторикой.

Основные понятия комбинаторики: перестановки, размещения, сочетания.

Перестановки:

Определение: Всякий установленный в конечном множестве порядок называется перестановкой его элементов.

Число всех перестановок из n элементов обозначается P_n .

$P_n = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot \ldots\ldots..(n-1)\cdot n = n!$ (n - факториал)

Задача : На собрании пожелали выступить 4 человека . Сколькими способами их можно расположить в списке ораторов.

$P_4 = 4! = 1*2*3*4 = 24$

Размещения:

Определение : Пусть дано конечное множество, состоящее из n элементов. Всякое его упорядоченное m элементное подмножество ($m \le n$) называется размещением из n элементов по m .

Число размещений из n по m обозначается A_n^m

A_n^m = n (n - 1) (n - 2)…(n – m + 1) = $\dfrac{n!}{(n-m)!}$,

Свойство: A_n^{m+1} = (n-m) A_n^m

Задача: В группе 20 студентов. Сколькими способами могут быть выбраны староста и профорг при условии , что каждый студент может быть избран только на одну из этих должностей.

$A_{20}^2 = 20*19 = 380$

Сочетания:

Пусть дано конечное множество, состоящее из n элементов. Всякое его m - элементное подмножество ($m \le n$) называется сочетанием из n элементов по m элементов.

Число сочетаний из n элементов по m элементам обозначается C_n^m

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Свойства: $C_n^m = C_n^{n-m} \quad (0 \le m \le n)$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$$

Задача: Группу студентов колледжа должна экзаменовать по математике комиссия из 2 преподавателей. Сколькими способами может быть составлена такая комиссия , если в колледже 5 преподавателей математики.

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

Вычислить :

1) $\frac{20!}{5!16!}$; 2) $\frac{7!-5!}{4!4!}$; 3) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; 4) $\frac{P_6 - P_5}{5!}$; 5) $\frac{P_5 + P_6}{P_7}$ 6) $\frac{A_7^3 \cdot P_4}{6!}$;

7) $\frac{A_8^6}{P_5 C_{10}^8}$; 8) $\frac{A_{20}^6 + A_{20}^5}{A_{20}^4}$; 9) $\frac{A_5^3 + A_5^4}{C_6^2}$;10) $\frac{P_6\left(C_7^5 + C_7^4\right)}{A_{10}^7}$;11) $C_8^3 + \frac{A_9^4}{P_4}$;12) $\frac{A_{10}^6 \cdot P_{10}}{C_9^6 \cdot P_7}$.

Решить задачи:

1. Группа учащихся изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в понедельник, если в этот день недели должно быть 4 различных урока?
2. На 5 сотрудников выделены 3 путевки. Сколькими способами их можно распределить, если
   а) все путевки различны,
   б) все путевки одинаковы?
3. Сколько различных перестановок можно образовать из букв следующих слов:
   а) зебра, б) баран, в) водород , г)абракадабра?
4. Во взводе 3 сержанта и 30 солдат. Сколькими способами можно выделить одного сержанта и 3 солдат для патрулирования?
5. Укротителю диких зверей предстоит вывести на арену цирка одного за другим 5 львов и 4 тигра. Сколькими способами он может это сделать, причем так , чтобы никакие 2 тигра не шли непосредственно друг за другом?
6. Из группы студентов в 16 человек создаются две строительные бригады в 10 и 6 человек. Сколькими способами можно создать эти бригады?
7. Хоккейная команда состоит из 2 вратарей, 7 защитников и 10 нападающих. Сколькими способами тренер может образовать стартовую шестерку, состоящую из вратаря, двух защитников и трех нападающих?

2. Классическое определение вероятности события.

Изучение каждого явления в порядке наблюдения или производства опыта связано с осуществлением некоторого комплекса условий (испытаний). Всякий результат или исход испытания называется **событием.**

Если событие при заданных условиях может произойти или не произойти, то оно называется **случайным**. В том случае, когда событие непременно должно произойти, его называют **достоверным**, а в том случае , когда оно заведомо не может произойти , - **невозможным**.

События называются **несовместными**, если каждый раз возможно появление только одного из них. События называются **совместными**, если в данных условиях, появление одного из этих событий не исключает появление другого при том же испытании.

События называются **противоположными**, если в условиях испытания они, являясь единственными его исходами, несовместны.

Классическое определение вероятности

Определение: Вероятностью события А называется отношение числа исходов m, благоприятствующих наступлению данного события А, к числу n всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновозможных), т.е.

P(A) = m/n.

Задача: В магазин поступило 30 холодильников, пять из них имеют заводской дефект. Случайным образом выбирается один холодильник. Какова вероятность того, что он будет без дефекта?

Решение: A – событие «холодильник без дефекта»

$P(A) = \frac{m}{n}$, где $m = C_{25}^1 = 25$ *число благоприятных исходов*

$P(A) = \frac{25}{30} \cdot 100\% = 83{,}3\%$ $n = C_{30}^1 = 30$ *число всех исходов*

Ответ: вероятность того, что выбранный холодильник без дефекта 83,3%

Решить задачи:

1.Из урны, в которой находятся 5 белых и 3 черных шара, вынимают два шара. Найти вероятность того, что оба шары белые.

2. Из урны, в которой находятся 12 белых и 8 красных шаров, вынимают наудачу 5 шаров. Какова вероятность того, что шары красного цвета?

3. Из урны, в которой 17 белых и 15 черных шаров и 12 синих, наудачу извлекают 7 шаров. Найдите вероятность того, что: 1) извлечено 2 белых и 3 синих шара 2) 1 белый и 3 черных шара 3) 4 черных и 2 синих шара.

3. Теоремы сложения вероятностей.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий.

Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$P(A+B)= P(A)+P(B)$;

$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$

Теорема сложения вероятностей совместных событий.

Вероятность появления хотя бы, одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A+B)= P(A)+P(B)-P(AB)$.

Задачи:

1. В ящике в случайном порядке разложены 20 деталей, причем 5 из них стандартные. Рабочий берет на удачу 3 детали. Найти вероятность того, что по крайней мере одна из взятых деталей окажется стандартной .
2. В ящике в случайном порядке положены 10 деталей, из которых 4 стандартных. Контролер взял на удачу 3 детали. Вычислите вероятность того, что не менее 2х взятых деталей оказались стандартными.
3. Из урны, в которой 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров извлечено 5 шаров. Вычислите вероятность того, что шары одинакового цвета.

4.Теоремы умножения вероятностей.

Теорема умножения вероятностей независимых событий.

Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$P(AB)= P(A)P(B)$;

$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$

Теорема умножения вероятностей зависимых событий.

Вероятность совместного появления двух зависимых событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго:

$P(AB)= P(A)P_A(B)= P(B)P_b(A)$;

Вероятность события В, вычисленная при условии, что произошло событие А, наз. ***условной вероятностью*** события В, относительно события А, обозначается $P_A(B)$

Задачи:

1. В одной урне находятся 12 белых и 8 черных шаров, а в другой - 14 белых и 9 черных. Из каждой урны вынули по 3 шара. Найти вероятность того, что шары окажутся белого цвета.
2. В ящике находятся 12 деталей, из которых 8 стандартных. Рабочий берет на удачу три детали. Вычислить вероятность того, что детали окажутся стандартными.
3. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка $p_1 = 0.65$, для второго $p_2 = 0.78$. Найти вероятность того что: 1) в мишень попадут оба стрелка 2) в мишень попадет один стрелок 3) В мишень не попал не один стрелок?
4. В цехе работают 7 мужчин и 5 женщин. По табельным номерам отобрали 3 человека. Найти вероятность того что все отобранные лица – мужчины.

5. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пусть события (гипотезы) $B_1B_2,\ldots, B_n$ образуют полную группу событий и при наступлении каждого из них, например B_i, событие А может наступить с некоторой условной вероятностью P_{B_i} (А). Тогда вероятность наступления события А равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события А:

$$P\ (A)=P(B_1)\cdot P_{B_1}(A)+P(B_2)\cdot P_{B_2}(A)+\ldots+P(B_n)\cdot P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P(B_n)=1$

Эта формула называется **формулой полной вероятности**.

Пусть событие А может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $B_1B_2,\ldots, B_n$ которые образуют полную группу событий. Если событие А уже произошло, то вероятности гипотез могут быть переоценены по **формуле Байеса** (формуле вероятности гипотез)

$$P_A(B_i)=\frac{P(B_i)\cdot P_{B_i}(A)}{P(A)}\ ,$$

где $P_A(B_i)-$вероятность каждой из гипотез после испытания, в результате которого наступило событие А ; $P_{B_i}(A)$- условная вероятность события А после наступления события B_I, а $P(A)$ находится по формуле полной вероятности.

Решить задачи:

1) На склад поступили детали из 3 станков. На первом станке изготовлено 40% деталей от их общего количества, на втором –35 % и на 3 – 25%, причем на первом станке было изготовлено 90% деталей первого сорта, и на втором – 80% и на третьем – 70%. Какова вероятность того. что взятая наугад деталь окажется первого сорта?

2) В урну, содержащую 3 шара, положили белый шар, после чего из нее наугад вынули один шар. Найдите вероятность того, что увеличенный шар окажется белым, если все возможные предположения о первоначальном составе шаров (по цвету) равновозможные.
3) В первом ящике имеются 8 белых и 6 черных шаров, а во втором 10 белых и 4 черных. Наугад выбирают ящик и шар. Известно, что вынутый шар черный. Найти вероятность того, что был выбран первый ящик.

6.Элементы математической статистики.
6.1. Выборочные ряды распределения (статистический ряд распределения).

Группировка исходных данных. Определение выборочных распределений.
Пусть X – наблюдаемые значения случайной величины (иначе она называется вариантой). Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется выборочным (или вариационным) рядом.
Пусть из генеральной совокупности отобран вариационный ряд $x_1 < x_2 < \ldots\ldots < x_k$, где x_1 наблюдалось n_1 раз, $x_2 – n_2$ раз, …, $x_k – n_k$ раз. Разность x_k - x_1 называется размахом выборки. Если объем выборки равен n, то $n = \sum_{i=1}^{k} ni$. Числа n_1, n2,... nk называются частотами, а $\omega = ni/n$ – относительными частотами соответствующих вариант.
Статистическим (выборочным) распределением называется перечень вариант и соответствующих им частот. Статистическое распределение выборки записывают в виде таблицы, в первой строке которой указывают варианты в порядке возрастания, во второй – соответствующие им частоты, а в третьей – относительные частоты.
Задача 1. Стрелок произвел 20 выстрелов по круглой мишени, состоящей из центрального круга и девяти концентрических кольцевых зон. Попадание в центральный круг оценивается в 10 очков, а попадание в кольцевые зоны – от 1 до 9 очков, в зависимости от расстояния зоны до центра мишени (чем дальше от центра, тем меньше число очков). Получены следующие результаты: 10, 10, 9, 10, 7, 9, 10, 8, 9, 10, 10, 10, 6, 8, 10, 9, 8, 10, 10. Найти статистическое распределение выборки.
Решение. Выборочный ряд распределения таков: x_1=6, x_2=7, x_3=8, x_4=9, x_5=10. Значения выборочного ряда распределения занесем в первую строку таблицы: 6 очков было выбито один раз, 7 очков – один раз, 8 очков – три раза, 9 очков – четыре раза, 10 очков – 11 раз. Значит n_1= 1, n_2=1, n_3= 3, n_4= 4, n_5=11. Частоты вариант занесем во вторую строку таблицы. Разделив частоту каждой варианты на объем выборки, равный 20, получим относительные частоты вариант. Запишем их в третью строку таблицы.
Статистическое распределение выборки имеет такой вид:

xi	6	7	8	9	10
ni	1	1	3	4	11
wi	0,05	0,05	0,15	0,25	0,55

Практическая работа:
1. При обследовании потока пассажиров на автобусном маршруте, насчитывающем 6 остановок, на конечном пункте было опрошено 25 пассажиров. Каждый из опрошенных пассажиров назвал номер остановки от конечного пункта, на которой он входил. Найдите статистическое распределение выборки по результатам опроса: 6; 5; 6; 4; 1; 2; 6; 6; 6; 5; 5; 3; 3; 4; 4; 4; 5; 6; 6; 6; 5; 3; 4; 6; 5.

2. В опыте по измерению заряда электрона были получены 25 значений: 4,758; 4,765; 4,760; 4,758; 4,775; 4,778; 4,765; 4,758; 4,766; 4,765; 4,758; 4,760; 4,772; 4,772; 4,758; 4,775; 4,760; 4,766; 4,775; 4,771; 4,772; 4,766; 4,771; 4,758; 4,772. Найдите статистическое распределение результатов измерений.
3. Из партии проволоки, идущей на изготовление канатов, было отобрано 20 экземпляров и подвергнуто испытанию на растяжение. Предельные растягивающие усилия, приложенные к образцам, даны в Н/$см^2$: 66 400; 67 100; 66 900; 67 100; 66 400; 67 100; 66 500; 66 400; 66 800; 66 800; 67 000; 66 800; 67 000; 66 500; 66 500. Найдите статистическое распределение выборки.
4. Для оценки количества детей дошкольного возраста в микрорайоне обследовали 40 – квартирный дом. Ниже приведено количество дошкольников в каждой квартире: 0; 1; 3; 1; 0; 4; 1; 2; 0; 0; 1; 2; 1; 0; 1; 0; 2; 0; 3; 1; 1; 0; 0;1; 1; 1; 0; 0; 2; 0; 1; 0; 1; 3; 0; 1; 1; 2; 0; 0. Найдите статистическое распределение выборки.
5. Для определения норм выработки хронометрировали время (в секундах) изготовления валов: 189; 190; 194; 185; 190; 186; 194; 187; 190; 191; 191; 187; 186; 189; 185; 193; 185; 193; 185; 191; 186; 193; 187; 191; 189; 194; 191; 187; 189; 194; 189; 185; 185; 189; 191; 194; 189; 190; 186; 193; 194; 187. Найдите статистическое распределение выборки.
6. Приведены данные выработки на одного рабочего бригады из 45 рабочих в отчетном году в процентах по отношению к предыдущему году: 80; 130; 97; 105; 100; 80; 120; 97; 105; 95; 97; 130; 100; 120; 80; 105; 100; 105; 97; 110; 115; 80; 97; 100; 110; 80; 130; 80; 97; 100; 115; 105; 120; 97; 130; 80; 110; 105; 115; 97; 80; 105; 100; 100; 80. Постройте: а) полигоны частот и относительных частот; б) гистограммы частот и относительных частот.

6.2. Геометрическая интерпретация статистических распределений выборки.

Пусть xi, ni, wi (i= 1,2, …, k) – статистическое распределение. Ломаная линия на координатной плоскости с вершинами в точках (xi; ni), где i= 1,2, …, k, называется полигоном частот, а ломаная с вершинами в точках (xi; wi) – полигоном относительных частот.
Если число наблюдений и число вариант велико, то удобно группировать варианты по отдельным интервалам их значений. Ширина интервалов Δx определяется делением размаха выборки xk – x1 на количество интервалов по m. В этом случае для геометрического изображения статистических распределений пользуются гистограммами. Гистограмма частот состоит из прямоугольников, построенных на частичных интервалах, имеющих длину Δx и высоту ni/ Δx, где ni – площадь i-го частичного прямоугольника. Гистограммы относительных частот строят аналогичным образом, только в качестве высот прямоугольников берут отношение wi/ Δx.

6.3. Эмпирическая функция распределения.

Пусть дано статистическое распределение частот некоторой выборки объема n случайной величины X:

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k

Где $x_1 < x_2 \ldots < x_k$.
Для любого вещественного числа x с помощью статистического распределения можно вычислить частоту n_x в интервале]-∞;x]. Функция F (x) = n_x/n называется эмпирической функцией распределения.

Δ1. Построить эмпирическую функцию распределения числа очков, выбитых стрелком:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<6 \\ 0{,}05 & 6\le x<7 \\ 0{,}1 & 7\le x<8 \\ 0{,}25 & 8\le x<9 \\ 0{,}45 & 9\le x<10 \\ 1 & x>10 \end{cases}$$

2.Числовые характеристики выборки.

Выборочное среднее. Выборочным средним выборки объема n со статистическим распределением

x_1	x_2	…	x_k
n_1	n_2	…	n_k

называется число

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \quad (1) \qquad \overline{x_B} = \sum_{i=1}^{k} w_i x_i \quad (2)$$

Δ1. Найти выборочное среднее число выбитых очков:
Решение. Воспользуемся статистическим распределением числа выбитых очков По формуле (2) находим

$$\overline{x_B} = 0{,}05\times1+0{,}05\times1+0{,}15\times3+0{,}25\times4+0{,}55\times11 = 7{,}6$$

Выборочная дисперсия. Выборочной дисперсией Dв выборки статистического распределения называется число

$$D_B = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\,(x_i - \overline{x_B})^2\,, \qquad (3)$$

Или

$$D_B = \sum_{i=1}^{k} w_i\,(x_i - \overline{x_B})^2. \qquad (4)$$

Δ2. Найти выборочную дисперсию числа выбитых стрелком очков.
Решение. В предыдущем примере было вычислено выборочное среднее этой выборки. Воспользовавшись полученным результатом и формулой (4), находим
$D_B = 0{,}05\,(6-7{,}6)^2 + 0{,}05\,(7-7{,}6)^2 + 0{,}15\,(8-7{,}6)^2 + 0{,}25(9-7{,}6)^2 + 0{,}55\,(10-7{,}6)^2$ $=3{,}83$.

3. Доверительные интервалы и доверительные вероятности математического ожидания.

Пусть $x_1, x_2 \ldots, x_n$ – независимые результаты измерения некоторой величины. Доверительным интервалом для истинного значения измеряемой величины а называется интервал

$$]\,\overline{a} - \Delta\boldsymbol{a}\,; \quad \overline{a} + \Delta\boldsymbol{a}\,[\,, \qquad (1)$$

где

$$\overline{a} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \text{ - выборочное среднее;} \qquad (2)$$

$$\Delta\boldsymbol{a} = t\alpha(n)\,\Delta S\text{□} \quad \text{- ошибка серии измерений} \qquad (3)$$

$$\Delta S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{a})^2}{n(n-1)}} \qquad (4)$$

- средняя квадратичная погрешность результата серии измерений; $t\alpha(n)$ – коэффициент Стьюдента, зависящий от числа измерений n; α - вероятность того, что истинное значение α измеряемой величины лежит в доверительном интервале (l), называемая доверительной вероятностью.

Практическая работа № 1.

Постройте вариационный ряд, полигон частот, полигон относительных частот и график функции распределения по данным выборки:

Вариант 1

2, 4, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 0, 6, 1, 2, 3, 2, 2, 4, 5, 6, 6, 1, 1, 2, 3, 6;

Вариант 2

5, 8, 7, 6, 7, 8, 9, 10, 5, 8, 7, 5, 6, 6, 9, 7, 8, 10, 9, 8, 5, 6, 8;

Вариант 3

10, 12, 15, 13, 16, 17, 18, 12, 10, 15, 13, 15, 17, 18, 15, 16, 17, 17, 18, 15;

Вариант 4

16, 20, 23, 18, 24, 18, 23, 25, 24, 24, 25, 18, 16, 16, 23, 25;

Вариант 5

32, 35, 38, 33, 39, 35, 36, 36, 38, 35, 32, 33, 33, 33, 39, 39;

Вариант 6

46, 45, 48, 45, 43, 43, 43, 48, 45, 44, 44, 48, 48, 44, 45, 43, 44, 48;

Практическая работа №2

По данным выборки постройте гистограмму частот, гистограмму относительных частот, эмпирическую функцию распределения и ее график – кумуляту;

Вариант 1

23,5; 26,4; 48,6; 35,8; 32,9; 41,1; 33,3; 46,3; 49,9; 34,1; 45,2; 34,5; 42,4; 47,3; 32,4; 33,3; 34,4; 30,8; 43,7; 46,9; 41,3; 34,6;

Вариант 2

50,5; 65,4; 51,6; 69,8; 65,9; 57,1; 67,3; 64,3; 54,9; 56,1; 61,2; 67,5; 64,4; 63,3; 62,4; 60,3; 69,4; 55,8; 53,7; 58,9; 57,3; 50,6;

Вариант 3

45,4; 51,4; 56,5; 47,8; 53,5; 47,2; 49,7; 48,3; 45,9; 51,3; 54,9; 54,8; 56,3; 56,4; 53,4; 53,9; 45,8; 57,4; 54,8; 48,7; 46,3; 49,6; 58,6; 54,7;

Вариант 4

30,8; 28,7; 36,5; 28,4; 27,5; 36,5; 34,2; 39,6; 30,8; 32,7; 28,7; 25,5; 26,1; 35,1; 38,1; 39,2; 37,0; 34,2; 36,1; 26,1; 28,9; 25,2; 32,5; 37,8; 34,2; 36,5; 37,3; 38,1; 29,0; 30,2;

Вариант 5

82,5; 79,8; 76,9; 74,8; 84,7; 85,2; 80,9; 80,7; 76,9; 75,8; 85,7; 82,5; 82,4; 75,9; 79,6; 83,6; 89,5; 84,7; 76,9; 78,6; 79,5; 89,4; 82,2; 86,7; 78,9;

Вариант 6

98,6; 87,6; 94,7; 86,5; 85,9; 82,3; 85,6; 83,9; 89,0; 96,8; 95,8; 95,9; 94,8; 84,9; 89,5; 83,9; 86,5; 87,9; 82,0; 84,8; 95,7; 84,3; 84,9; 82,5; 85,7;

Тема 1: Числовые множества в математике, приближенные вычисления

1.Числовые множества:

$N\ \{1,2,3,4\ldots\}$ множество натуральных чисел;

$Z\ \{\ldots-3,-2,-1,0,1,2,3\ldots\}$множество целых чисел;

Множество рациональных чисел:

$R\ \left\{\frac{m}{n}\quad - \textit{несократимая дробь}\right\}$бесконечная периодическая десятичная дробь.

Иррациональные числа – бесконечная непериодическая десятичная дробь:

$\sqrt{2}=1{,}41421356...$ е – натуральное число (е = 2, 718281…)

$\sqrt{3}=1{,}732050807...$ π = 3, 14159265…

$\sqrt{5}=2{,}23606797...$

Числа рациональные + иррациональные образуют множество действительных чисел.

Числовая прямая – это геометрическое изображение действительного числа.

В множестве действительных чисел не разрешима задача $x^2+1=0$, для решения подобных задач вводится множество комплексных чисел.

2.Множество комплексных чисел:

Комплексным числом называется выражение вида $x+yi$, в котором x и y – вещественные числа, а i – мнимая единица, где $i^2=-1$;

1) $x+0i=x;\quad 0+yi=yi;\quad 1i=i;\quad -1i=-i$
2) $x+yi=x_1+y_1i$тогда и только тогда, когда $x=x_1$ и $y=y_1$
3) $(x+y_i)+(x_1+y_1i)=(x+x_1)+(y+y_1)i$
4) $(x+y_i)(x_1+y_1i)=(xx_1-yy_1)+(xy_1+x_1y)i$

Комплексное число x + yi, в котором y ≠ 0, называется мнимым числом.

Число i называется мнимой единицей.

3.Действия над комплексными числами в алгебраической форме:

Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел можно выполнять по правилам этих действий над многочленами с заменой степени числа i.

Дано: $z_1=-2+5i$

$z_2=3-4i$

1. Сложение:

   $z_1+z_2=(-2+5i)+(3-4i)=1+i$
2. Вычитание:

   $z_1-z_2=(-2+5i)-(3-4i)=-5+9i$
3. Умножение:

$$z_1*z_2=(-2+5i)*(3-4i)=-6+8i+15i-20i^2=14+23i$$

4. Деление:

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{(-2+5i)}{(3-4i)}=\frac{(-2+5i)*(3+4i)}{(3-4i)*(3+4i)}=\frac{-6-8i+15i+20i^2}{9-16i^2}=\frac{-26+7i}{25}=-\frac{26}{25}+\frac{7}{25}i$$

5. Степени мнимой единицы:

$i^2=-1$

$i^3=i^2*i=-i$

$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$

$i^5=i^4*i=i$

$i^{11}=i^{10}*i=(i^2)^5*i=-i$

$i^{12}=(i^2)^6*(1^6)=1$

$i^{19}=i^{18}*i=(i^2)^9*i=-i$

$i^{22}=(i^2)^{11}=-1$

Практическая работа «Числовые множества в математике»

1. Представить рациональное число в виде десятичной дроби:
   $\frac{2}{5}$; $\frac{8}{11}$; $-\frac{3}{4}$; $8\frac{2}{7}$; $\frac{15}{99}$; $\frac{19}{42}$.
2. Показать, что числа $\sqrt{7}$; $\sqrt{19}$; $\sqrt{41}$; $\sqrt{23}$ иррациональные.
3. Выполнить действие:

Дано: а) $z_1 = -3 + 4i$ б) $z_1 = 2 - 7i$ в) $z_1 = 0{,}5 - 1{,}3i$

$z_2 = -1 - 2i$ $z_2 = -5 + 9i$ $z_2 = 0{,}2 + 1{,}8i$

Найти: $z_1 + z_2$; $z_1 - z_2$; $z_1 \div z_2$ $z_1 * z_2$;

4. Найти :

а) $(3i-2)^2$; $(1-\sqrt{3i})^2$; $(5+2i)^2$;

б) $i^{14}+i^{15}-i^{17}+i^{25}$; $i^{11}-i^{34}+i^{43}$; $i^{20}-i^{23}+i^{30}-i^{41}$;

в) $(2+3i)(3-2i)$; $(3-2i)^2$; $(1+i)^3$;

г) $\frac{1+i}{1-i}+\frac{2i}{1+i}+\frac{4-3i}{4+3i}$; $(4+3i)^2-(4-3i)^3$;

5. Решить уравнения:

$x^2+25=0$; $x^2-2x+5=0$; $x^2+4x+13=0$

4.Погрешности, границы погрешностей.

Погрешности служат для того, чтобы определить, насколько точно взято то или иное приближение, выполнен расчёт, вычисление. Чем меньше погрешность, тем точнее приближённое вычисление. Погрешности различают: абсолютная и относительная.

1.Абсолютная погрешность: x - точное значение числа

a – приближённое значение числа

Модуль разности между точным числом x и его приближённым значением, *a* называется абсолютной погрешностью: $|x-a|=\alpha$

$\Delta\alpha$ - граница абсолютной погрешности,

По известной границе абсолютной погрешности можно установить границу, в которой заключено точное значение числа

$|x-a|\le\Delta\alpha$

$-\Delta\alpha\le x-a\le\Delta\alpha$

$a-\Delta\alpha\le x\le a+\Delta\alpha$

↓ ↓

нижняя верхняя

граница граница

2.Относительная погрешность.

Относительной погрешностью приближённого значения, *a* числа x называется отношение абсолютной погрешности этого приближения к числу *a*:

$$\delta=\frac{\alpha}{a}$$

ε - граница относительной погрешности, 3.Точными называются числа, приведённые в условии задачи и являющиеся результатом счёта в сравнительно небольших пределах.

Приближёнными считают числа, полученные в результате любых измерений или действий над рядом чисел, из которых хотя бы одно является приближённым.

Значащими цифрами числа называются все его цифры, кроме нулей расположенных слева от первой отличной от нуля цифры и нулей, расположенных справа, в конце числа, если эти нули не являются результатами точного измерения, а поставлены вместо неизвестных или отброшенных цифр.

Десятичными знаками числа называются цифры, расположенные справа от запятой.

5. Правила действия над приближёнными числами.

1. При сложении и вычитании приближенных чисел следует сохранить в результате столько десятичных знаков, сколько их имеется в приближённом числе с наименьшим числом десятичных знаков, т.е. отбрасывать цифры тех разрядов справа, которых нет хотя бы в одном из приближённых чисел.
2. При умножении и делении приближённых чисел в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их имеет приближённое число с наименьшим числом значащих цифр.
3. При возведении приближённого числа в степень следует сохранить в результате столько значащих цифр, сколько их имеет возводимое в степень приближённое число.
4. При вычислении промежуточных результатов следует брать одной цифрой больше, чем рекомендуется предыдущими правилами ("запасная" цифра).

Желательно все подсчёты при решении задач, а также при проведении лабораторных работ производить с помощью микрокалькулятора.

Примеры:
1. Произвести действия:

$$873 + 2{,}73 + 65{,}69 = 941{,}42 \approx 941$$

$$33{,}89 - 3{,}527 + 1{,}4 = 31{,}763 \approx 31{,}8$$

2. Вычислить значение величины:

$$U = \frac{2{,}34 \cdot 32{,}71 \cdot 0{,}13 \cdot 10^{-6}}{0{,}80 \cdot 10^{-6}}$$

Решение:

$$32{,}71 \cdot 2{,}34 \approx 76{,}541 \approx 76{,}54$$

$$76{,}54 \cdot 0{,}130 = 9{,}9502 \approx 9{,}95$$

$$9{,}95 \div 0{,}800 = 12{,}4$$

Ответ : 12,4

3. $S = 3{,}14 \cdot (2{,}75)^2$

Ответ: 23,8

4. $a = \sqrt[3]{43{,}8}$

Ответ: 3,53

6.Приближённое вычисление на микрокалькуляторе.

6.1 Выполнение 4 арифметических действий:

$5{,}894-2{,}199+18{,}32$

$6{,}3314-12{,}5634+2{,}014$

$\dfrac{27{,}11*0{,}0291}{5{,}7}$

6.2. Возведение в степень:

$(2{,}3*0{,}253)^2$; $\sqrt{\dfrac{9{,}16*24{,}048}{5{,}042}}$; $\sqrt[3]{49{,}02}$

6.3. Нахождение обратной функции:

$\dfrac{1}{\sqrt{37{,}9}}$; $\sqrt{\dfrac{12{,}743}{5{,}08*21{,}3}}$

6.4. Тригонометрические функции:

$29{,}3*\cos 129°15'$; $\sin 428°18'/20{,}3$; $\tan 69°34'*4{,}029$; $\cot 81°14'$.

6.5. Показательная и логарифмическая функции:

$\ell^{\sqrt{4,5}}$; $\ln 41{,}92$; $20{,}4*\ln 56{,}92$; $\dfrac{\ell^{2,92}}{1{,}019*5{,}17}$

Самостоятельно:

$\dfrac{ctg48°15'}{2{,}92}$; $\sqrt[4]{\dfrac{56{,}41*1{,}02}{tg12°20'}}$; $\dfrac{\sin 102°15'*10{,}21}{\cos 12°}$; $\ln\dfrac{160*4{,}003}{50{,}4}$;

$\ell^{\sqrt{6,03*0,2142}}$; $\sqrt[5]{\dfrac{12{,}37}{\ell^{1,92}}}$; $\dfrac{\cos 118°\ln\sqrt{9{,}36}}{0{,}129}$; $\sin 8{,}06*e^{\frac{1}{4}}$.

Домашняя работа:

Выполнить действия с приближёнными числами на микрокалькуляторе:

1. $12{,}948-9{,}064+5{,}36+42{,}407$;

2. $37{,}28+0{,}669-40{,}2$;

3. $(28{,}163-4{,}019+20{,}52)*0{,}294$;

4. $5{,}38*16{,}49*10{,}304$;

5. $50{,}195*16{,}721/0{,}156$

6. $\dfrac{12{,}3}{0{,}649*5{,}3}$;

7. $\sqrt[4]{3{,}08*5{,}1^3}$;

8. $\sqrt[3]{5{,}649*\sqrt{28{,}4}}$;

9. $\sin 74°15'*3{,}16$;

10. $\dfrac{\cos 112°40'}{4{,}003}$;

11. $tg68°49'\sqrt{8{,}93}$;

12. $\dfrac{ctg103°15'}{\sqrt[3]{40{,}16}}$;

13. $2{,}06\ln 6{,}42$;

14. $\dfrac{\sqrt{\ln 107{,}3}}{0{,}024}$;

15. $\ln\sqrt{69{,}4}$;

16. $l^{2\sin 15°}$

17. $l^{\cos 67°+\tan 123°}$

18. $\dfrac{4{,}69*\cos 69}{\ln 10{,}3}$;

19. $1/l^{0,387*6,1}$

20. $\dfrac{123{,}4*ctg50°30'}{\sin 40°20'}$;

21. $\ln\dfrac{734\sqrt[3]{25{,}4}}{78{,}5\cos 347°}$.

22. $\sqrt[4]{\dfrac{1}{\cos 17°}+e^{tg24°}}$.

Тема 2: Степени, корни, логарифмы

1.Степень с действительным показателем, свойства степени.

1. Степень с натуральным показателем:

По определению $a^n = \underbrace{a*a*a......a}_{n}$; $3^4 = \underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}_{4} = 81$

$a-$ основание

$n-$ показатель

a^n - степень

$(-2)^5 =$ -32 ; $5^3 = 125$; $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; $\left(-2\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{5}{2}\right)^3 = -\frac{125}{8}$

2. Степень с отрицательным показателем:

По определению: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$5^{-2} = \frac{1}{5^2}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = 27$.

3. Степень с нулевым показателем.

По определению $a^0 = 1$

$(-3{,}7)^0 = 1$; $(9{,}0016)^0 = 1$

4. Степень с рациональным (дробным) показателем.

По определению $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; $9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3} = 3^3 = 27$; $16^{\frac{3}{4}} = \left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$.

$8^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$; $9^{-\frac{1}{2}} = \left(3^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

Свойства степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ - при умножении степеней с одинаковым основанием показатели складываются, а основание остается прежним.

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$ - при делении степеней с одинаковым основанием показатели вычитаются, а основание остается прежним.

3. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$ - при возведении степени в степень показатели перемножаются.

4. $(a\cdot b)^m = a^m \cdot b^m$ - при возведении в степень произведения нужно возвести в степень каждый сомножитель.

5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ - при возведении в степень дроби нужно возвести в степень и числитель и знаменатель дроби.

Практическая работа по вычислению степени с любым действительным показателем.

Вычислить:

1. $\dfrac{2\cdot 5^{22}-9\cdot 5^{21}}{25^{10}}$; **2.** $\dfrac{5\left(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14}\right)}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}$; **3.** $\left[8-3\left(\dfrac{5}{9}\right)^{0}\right]^{-3}$; **4.** $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\dfrac{5}{8}\right]^{-1}$;

5. $\left(-0{,}1\right)^{-4}+\left(2\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$; **6.** $\dfrac{3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-4^{0}}$ **7.** $7\cdot\left(4^{\frac{3}{2}}-27^{\frac{2}{3}}+16^{-\frac{5}{4}}+(\dfrac{1}{49})^{-\frac{3}{2}}\right)$;

8. $4^{-\frac{1}{2}}+(\dfrac{1}{64})^{-\frac{3}{2}}+(0{,}16)^{-\frac{1}{2}}+(2\dfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}$; **9.** $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}+8^{\frac{1}{3}}:4^{-2}$;

10. $\left(\dfrac{1}{16}\right)^{-0,75}+\left(-0{,}027\right)^{\frac{4}{3}}+\left(-1\dfrac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

Проверь себя:

11. $(0{,}25)^{-3}-\left(-2\dfrac{1}{2}\right)^{-1}+\left(-\dfrac{5}{2}\right)^{-2}$; **12.** $64^{\frac{2}{3}}\left(\dfrac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}:8^{-\frac{1}{3}}$;

13. $\left(4^{-2}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(81\cdot 10^{4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(7\dfrac{19}{32}\right)^{0,2}+\left(4{,}5\right)^{0}$ **14.** $-0{,}2^{3}\cdot 0{,}2^{-2}+64^{\frac{1}{6}}-5^{3}:5+6{,}5^{0}$

Вычисление степени на микрокалькуляторе:

1. $(3{,}29-5{,}83)^{2,43}$

2. $\left(\dfrac{12{,}51+6{,}85}{5{,}32}\right)^{\sqrt{8,16}}$

3. $(15{,}42-9{,}85)^{2\sqrt[3]{31,9}}$

4. $117{,}32^{-0,027}+53{,}24^{\sqrt{6,81}}$

Домашнее задание:

1. $\left(125^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}-3\right)^{-\frac{1}{2}}$; **2.** $32^{\frac{1}{5}}+2^{-2}\cdot 2^{4}-42^{\circ}+3^{-2}:3^{-3}$;

3. $\left[\sqrt[1,5]{10^{-4,5}}\cdot(\dfrac{1}{81})^{-\frac{1}{2}}+10000^{\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$; **4.** $2^{2}:2^{-3}-(\dfrac{1}{9})^{\frac{3}{2}}+5^{-2}\cdot 5^{3}+1{,}5^{\circ}$;

Вычислить:

1. $\dfrac{2\cdot 5^{22}-9\cdot 5^{21}}{25^{10}}$ **3.** $\left[8-3\left(\dfrac{5}{9}\right)^{0}\right]^{-3}$ **5.** $\left(-0{,}1\right)^{-4}+\left(2\dfrac{1}{3}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{7}\right)^{-2}$

2. $\dfrac{5\left(3\cdot 7^{15}-19\cdot 7^{14}\right)}{7^{16}+3\cdot 7^{15}}$ **4.** $\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}-\dfrac{5}{8}\right]^{-1}$ **6.** $\dfrac{3\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}+4^{-1}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3}-4^{0}}$

7. $9^{\frac{1}{2}}$; $27^{\frac{2}{3}}$; $16^{\frac{5}{4}}$;$4^{-\frac{1}{2}}$;$\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$;$64^{-\frac{2}{3}}$;$\left(2\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$;$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$;$(0{,}16)^{-\frac{1}{2}}$

8. $\left(3^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$;$2^{-3}\cdot 64^{\frac{1}{2}}$;$8^{\frac{1}{3}}:2^{-1}$;$3^{-2}\cdot 81^{\frac{1}{4}}$;$4^{-2}:8^{\frac{1}{3}}$;$\left(3\frac{3}{8}\right)^{-\frac{2}{3}}$

9. $64^{-\frac{2}{3}}\left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}$

10. $\left[125^{\frac{2}{3}}-16^{\frac{1}{2}}+343^{\frac{1}{3}}-3\right]^{\frac{1}{2}}$

11. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0{,}75}+(-0{,}027)^{\frac{4}{3}}+\left(-1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$

12. $\left[\sqrt[1{,}5]{10^{-4{,}5}}\cdot\left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}+10000^{-\frac{3}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$

13. $\left(4^{-2}\right)^{-\frac{3}{4}}+\left(81\cdot 10^{4}\right)^{\frac{1}{4}}-\left(7\frac{19}{32}\right)^{0{,}2}+(4{,}5)^{0}$

14. $-0{,}2^{3}\cdot 0{,}2^{-2}+64^{\frac{1}{6}}-5^{3}:5+6{,}5^{0}$

15. $32^{\frac{1}{5}}+2^{-2}\cdot 2^{4}-42^{0}+3^{-2}:3^{-3}$

16. $2^{2}:2^{-3}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}+5^{2}*5^{3}+1{,}5^{0}.$

2. Логарифм числа с произвольным основанием.

Определение: Логарифмом числа b (b>0) по основанию числа $a(a>0, a\neq 1)$, называется показатель степени, в которую нужно возвести *a*, чтобы получить *b*.

$\log_a b = c \Rightarrow a^c = b.$

$a^{\log_a b}$ =b – основное логарифмическое тождество.

Виды логарифмов.

Десятичный логарифм: $\log_{10} N = \lg N$

Натуральный: $\log_e N = \ln N$ e = 2.7……

Примеры логарифма числа:

1) $\log_2 32 = 5$, т.к. $2^5 = 32$;   2) $\log_{\frac{1}{2}} 16 = -4$, т.к. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-4} = 16$;

3) $\log_3\sqrt{3} = \frac{1}{2}$, т.к. $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ 4) $\log_{32} 8 = \log_{2^5} 2^3 = \frac{3}{5} = 0{,}6$

Свойства логарифмов:

1. Логарифм произведения двух или нескольких положительных чисел равен сумме логарифмов сомножителей.
   $\log_a(NN_1) = \log_a N + \log_a N_1$.
2. Логарифм частного или дроби равен разности логарифмов числителя и знаменателя.
   $\log_a\frac{N}{N_1} = \log_a N - \log_a N_1$,
3. Логарифм степени равен показателю степени, умноженному на логарифм основания степени.
   $\log_a N^l = l\log_a N$;
4. если $a>1$ и $x_1<x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ - возрастающая функция
   если $0<a<1$ и $x_1<x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ - убывающая функция

Практическая работа по вычислению логарифма числа, действия логарифмирования и потенцирования.

1. Написать следующие показательные равенства в виде логарифмических:

1. $3^6=729$ **2.** $4^5=1024$ **3.** $10^4=10000$ **4.** $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

5. $\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$ **6.** $10^{-3}=0{,}001$; **7.** $5^{-2}=\frac{1}{25}$ **8.** $(0{,}8)^0=1$.

2. Написать следующие логарифмические равенства в виде показательных:

1. $\log_2 64=6$ **2.** $\log_3 81=4$ **3.** $\log_5 125=3$ **4.** $\log_{10} 10000=4$

5. $\log_{10} 0{,}01=-2$ **6.** $\log_{\frac{4}{3}}\frac{27}{64}=-3$ **7.** $\log_3\frac{1}{81}=-4$ 8. $\log_{0,2}\sqrt{5}=-0{,}5$

3. Найти при основании 2 логарифмы следующих чисел:

$8;\ 32;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{16};\ \sqrt{2};\ 4\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{4}{\sqrt[3]{2}};\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}};\ \frac{\sqrt[3]{4}}{8}.$

4. Найти при основании 3 логарифмы следующих чисел:

$243;\ 27;\ 1;\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{\sqrt[3]{3}};\ \sqrt[3]{9};\ \frac{9}{\sqrt[4]{3}};\ 3^{\sqrt{3}};\ \frac{1}{3\sqrt{3}};\ \frac{27}{3\sqrt{3^3}};\ \frac{3}{\sqrt[5]{27}}.$

5. Найти при основании $\frac{1}{2}$ логарифмы следующих чисел:

$\frac{1}{8};\ 2;\ \frac{1}{4};\ 16;\ \frac{1}{64};\ 4\sqrt{2};\ \frac{1}{\sqrt[4]{2}};\ \frac{8}{\sqrt{2}};\ \frac{16}{\sqrt[3]{8^2}};\ 4\sqrt[4]{16^3};\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}.$

Проверь себя:

6. Найти неизвестное из следующих равенств:

$x=\log_3 9$ $\quad x=\log_9 27$ $\quad \log_2 x=3$ $\quad \log_x 27=3$

$y=\log_2 16$ $\quad y=\log_5 0.04$ $\quad \log_5 x=0$ $\quad \log_x 4=\frac{1}{2}$

$z=\log_5 625$ $\quad U=\log_2 0.125$ $\quad \log_{27} y=\frac{2}{3}$ $\quad \log_4\frac{1}{8}=x$

7. Выполнить потенцирование выражения, применив свойства логарифмов:

1. $\log x=\log 8-\log 2+\log 4$ 4. $\log x=\log 6+\log 5-\log 3$

2. $\log y=4\log 2-\frac{2}{3}\log 8+\log 6$ 5. $\log y=\frac{1}{3}\log 27+2\log 5-3\log 2$

3. $\log z=\frac{3\log a-(3\log b+2\log c)}{4}$ 6. $\log z=\frac{4\log\sqrt{a}-(2\log a+\log\sqrt[3]{a^2})}{8}$

8. Сравнить числа:

1. $\log_3 6$ и $\log_3 8$ 2. $\log_{\frac{1}{2}} 5$ и $\log_{\frac{1}{2}} 4$

3. $\log_7 8$ и $\log_5 8$ 4. $\log_3 10$ и $\log_4 12$

9. Вычислить логарифм числа на микрокалькуляторе:

$\lg 139{,}08$ $\quad \ln 27{,}945$ $\quad \log_3 15$ $\quad \log_{\sqrt{8}} 19$

$\lg 5{,}128$ $\quad \ln 0{,}719$ $\quad \log_{125} 36$ $\quad \log_{17}\sqrt{51}$

Примеры логарифмирования выражений:

1) $\log x = \log 3a^2 b = \log 3 + \log a^2 + \log b$

2) $\log y = \log \dfrac{2ab}{\sqrt{c}} = \log 2ab - \log \sqrt{c} = \log a + \log b - \dfrac{1}{2}\log c$

3) $\log x = \log 3(a-b)^2 = \log 3 + \log (a-b)^2 = \log 3 + 2\log(a-b)$

4) $\log y = \log \dfrac{2a}{a^2 - b^2} = \log 2a - \log(a-b)(a+b) = \log 2 + \log a - \log(a-b) - \log(a+b)$

5) $\log x = \log\left((ab)^{-1}(\dfrac{b}{a})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{n}\left(-(\log a + \log b) + \dfrac{1}{2}(\log b - \log a)\right) = \dfrac{-\frac{3}{2}\log a - \frac{1}{2}\log b}{n} =$

$= \dfrac{3\log a + \log b}{2n}$

6) $\log x = \log \dfrac{8}{2} \cdot 4 \Rightarrow x = 16$

7) $\log y = \log 2^4 - \log 8^{\frac{2}{3}} + \log 6 = \log \dfrac{2^4}{(2^3)^{\frac{2}{3}}} \cdot 6 = \log 2^2 \cdot 6 \Rightarrow y = 24$

8) $\log z = \dfrac{1}{4}\left[\log a^3 - (\log b^3 + \log c^2)\right] = \dfrac{1}{4}\log \dfrac{a^3}{b^3 c^2} = \log\left(\dfrac{a^3}{b^3 c^2}\right)^{\frac{1}{4}} \Rightarrow z = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^3 c^2}}$

10. Домашнее задание №2:
Вычислить:

1. $\log_2 \sqrt[3]{16} + \log_8 \sqrt[4]{2} - \log_3 (27\sqrt{3}) - \log_5 \sqrt{5\sqrt{5}}$

2. $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{9} + \log_{\sqrt[3]{\frac{1}{3}}} 9 + \log_{\sqrt{3}} 27 - \log_{\frac{1}{9}} \sqrt[4]{27}$

3. $\log_5 \sqrt[4]{5} + \dfrac{1}{2}\log_{\sqrt{5}} 25 - \log_5 \sqrt[2]{5} - 2$

4. $\dfrac{\log_5 125}{\log_5 25} + \dfrac{\log_{\frac{1}{5}} \sqrt{5}}{\log_{0,2} \sqrt[3]{25}} + 5^{\log_5 3}$

5. $3^{1+\log_3 4} + 4^{\log_2 5} - 3^{\log_9 6}$

6. $\log x = \dfrac{1}{2}\log 9 - 2\log 5 + \log 10$

3.Тождественное преобразование алгебраических, степенных, показательных, логарифмических выражений.

1. Тождественные преобразования алгебраических выражений:

1.1.Сократите дробь:

a) $\dfrac{63x^2y^3}{77y^4}$; $\dfrac{2x^3 - 8x^5}{12x^4}$

b) $\dfrac{5a^2b^7 - 4ab^3}{10a^4b^6 - 8a^3b^2}$; $\dfrac{a^2+5a+25}{2a^4-250a}$

c) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$

1.2.Наиболее рациональным способом найдите числовые значения дробей:

a) $\dfrac{1-6a+9a^2}{9a^2-1}$ *при* $a = \dfrac{5}{12}$

b) $\frac{4xy^3-4x^3y}{6xy^3-12x^2y^2}$ *при x=4, y=3*

1.3. Упростите выражение:

a) $\frac{25a^5}{6a^3-6}:\frac{10a^4}{9a^2+9a+9}$; $\frac{a^3+8}{4a^2-1}\cdot\frac{1-2a}{2a^2-4a+8}:\frac{4+4a+4a^2}{6a+3}$

b) $\frac{a^4-64a}{a^2-2a+1}\cdot\frac{a^2-1}{a^2-16}:\frac{a^3+4a^2+16a}{a+4}$; $\frac{(3a-4)^2}{2-3a}+\frac{9a^2}{3a-2}$

c) $\frac{15a-13}{3a+1}-\frac{10a-1}{2a}$; $\frac{x}{9x-3}+\frac{x-1}{18x-6}-\frac{x+2}{4-12x}$

d) $\frac{2}{x+3}+\frac{x+15}{x^2-9}+\frac{3}{3-x}$; $\frac{x^2}{x-3}+\frac{18+2x^2}{x^2+3x+9}+\frac{3x(x^2+x+15}{27-x^3}$

e) $\frac{x+2y}{x^2+2xy+y^2}-\frac{x-2y}{x^2-y^2}$

2. Тождественные преобразования степенных выражений:

2.1. Сложение и вычитание корней

Выполните действие:

a) $(2\sqrt[3]{11}-8\sqrt[5]{7)}-\left(7\sqrt[5]{7}-\sqrt[3]{11}\right)$; $(2+3\sqrt{32})+(\frac{1}{2\sqrt{128}}-6\sqrt{18})$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{48}-(1/5)\sqrt{300}$; $20\sqrt{245}-\sqrt{5}+\sqrt{125}-2\frac{1}{2}\sqrt{180}$

c) $\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}$; $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\frac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$

2.2. Умножение и деление корней

Выполните умножение:

a) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$; $\sqrt{10}\cdot\sqrt{20}$; $3\sqrt{7}\cdot 2\sqrt{14}$

b) $5\sqrt[4]{2a}\cdot\sqrt[4]{8a^3}$; $0{,}5\sqrt{a^3b^3}\cdot 2\sqrt{a^3b^2}$

c) $\left(\sqrt{21}+\sqrt{14}-2\sqrt{35}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}+\sqrt{20}$; $1-0{,}1\sqrt{5}\cdot\left(\sqrt{15}+\sqrt{20}-\sqrt{55}\right)$

d) $\sqrt[9]{9/4}\cdot\sqrt[4]{2/3}\cdot\sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[12]{3}$; $\left(3\sqrt{10}-2\sqrt[3]{4}+6\sqrt[6]{25}\right)\cdot\sqrt[4]{2}$

e) $\left(2\sqrt{6}+3\sqrt[3]{15}-\sqrt[5]{10}\right)\cdot\sqrt[4]{12}$

2.3. Сократите дроби:

a) $\frac{\sqrt{15}-\sqrt{6}}{\sqrt{35}-\sqrt{14}}$

b) $\frac{\sqrt{10}+\sqrt{15}}{\sqrt{8}+\sqrt{12}}$

2.4. Освободите дроби от корней в знаменателе:

a) $\frac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; $\frac{18}{\sqrt{6}}$; $\frac{46}{\sqrt{8}}$; $\frac{6}{\sqrt[4]{12}}$; $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

b) $\frac{a}{1-\sqrt{a}}$; $\frac{2a}{3+\sqrt{2a}}$; $\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}}$

2.5. Выполните деление:

a) $\sqrt{a}:\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[6]{x^5}:\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[5]{a^2}:\sqrt[15]{a^2}$

b) $\sqrt{a}:\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[5]{a^3}:\sqrt[3]{a^2}$; $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$

c) $(5\sqrt[3]{4}-6\sqrt[3]{10}+15\sqrt[3]{16}):3\sqrt[3]{1/2}$

d) $(2ab\sqrt[3]{x^2}-x\sqrt[3]{b}):\sqrt{bx}$

2.6. Возведите в степень следующие выражения:

a) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$; $\left(\sqrt[6]{2}-\sqrt{3}\right)^2$

b) $\left(\sqrt{3}-2\sqrt[3]{2}\right)^2; \left(\sqrt{2}+3\sqrt[3]{3}\right)^2$

c) $\left(\sqrt{11+6\sqrt{2}}-\sqrt{11-6\sqrt{2}}\right)^2$

3. Преобразование показательных, логарифмических выражений:

*3.1.*Найдите число x по его логарифму:

- $\log_2 x = \log_2 72 - \log_2 9$
- $\log_4 x = \log_4 2\sqrt{2} + \log_4 8\sqrt{8}$
- $\log_7 x = \log_7 14 - \log_7 98$
- $\lg x = \lg\frac{1}{8} + \lg\frac{1}{125}$
- $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}} 19 - \log_{\frac{1}{2}} 38 + \log_{\frac{1}{2}} 3$
- $\log_{0,2} x = \log_{0,2} 93 + \log_{0,4} 4 - \log_{0,2} 31$
- $\log_{\sqrt{7}} x = 2\log_{\sqrt{7}} 4 - \log_{\sqrt{7}} 2 + \log_{\sqrt{7}} 5$
- $\log_{\frac{1}{3}} x = \log_{\frac{1}{3}}\frac{7}{9} + \log_{\frac{1}{3}} 21 - 2\log_{\frac{1}{3}} 7$
- $\lg x = 2\lg 7 - 3\lg 3 + \lg 8$
- $\lg x = 2\lg 3 + \lg 6 - \frac{1}{2}\lg 9$
- $\lg x = \frac{1}{2}\lg 3 + \frac{2}{3}\lg 5 - \frac{1}{3}\lg 4$
- $\lg x = -\frac{1}{2}\lg 5 + \mathrm{lo}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\lg 25$

3.2.Вычислите:

- $\log_2 4 \cdot \log_3 27 ; \log_5 125 : \log_4 16 ; \log_{0.5} 0.25 \cdot \log_{0.3} 0.09$
- $\lg 1000 : \lg 100; \log_{\frac{1}{2}} 4 \cdot \log_3 9 : \log_4 \frac{1}{4}; \log_{\sqrt{3}} 3\sqrt{3} : \log_{\frac{1}{7}} \sqrt{49} \cdot \log_5 \sqrt{5}$
- $\log_3 81 : \log_{0.5} 2 \cdot \log_5 125 ; \log_{\sqrt{5}} 5\sqrt{5} \cdot \log_{0.3} \sqrt{0.3} : \lg 10\sqrt{0.1}$
- $2^{2+\log_2 5}; 5^{\log_5 16-1}; 3^{1+\log_3 8}; 8^{\log_8 3-2}$
- $8^{\log_2 3}; \left(\frac{1}{9}\right)^{\log_{\frac{1}{3}} 13}; 100^{\lg 5}; \left(\frac{1}{16}\right)^{\log_{\frac{1}{2}} 5}$
- $\left(\frac{1}{9}\right)^{1+\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}} 18}; 49^{1-0,5\log_7 14}; \frac{\log_7 25}{\log_7 5}; \frac{\log_{\frac{1}{2}} 9}{\log_{\frac{1}{2}} 27}$
- $\frac{\log_4 36}{\log_4 6}; \frac{\log_{0,3} 32}{\log_{0,3} 64}; \frac{\frac{1}{2}\log_3 64 - 2\log_3 2}{\log_3 2}; \frac{\log_6 12 + 2\log_6 2}{\frac{1}{3}\log_6 27 + 4\log_6 2}$

4.Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по теме: «Степени, корни, логарифмы»

1.Вычислить:

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 25^{\frac{1}{2}} - 81^{\frac{1}{2}} \cdot 125^{-\frac{1}{3}}.$

2. $216 - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} - 5^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}.$

3. $49^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{7}\right)^{-2} + 2^{-1} \cdot (-2)^{-2}.$

4. $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 16^{\frac{1}{2}} - 2^{-1} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 8^{\frac{1}{3}}.$

5. $\left(\left(\frac{1}{25}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 7^{-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{-2}\right):49^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\dfrac{8^{-\frac{2}{3}}\cdot 25^{-\frac{1}{2}}-2^{-1}}{64^{\frac{1}{4}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}}$.

7. $\dfrac{7^{-1}\cdot\left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}-64^{-\frac{1}{3}}\cdot 3^{-2}}{5^{-1}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}}$.

8. $\dfrac{25^{-\frac{1}{2}}\cdot 5^{-1}\cdot 125^{\frac{1}{3}}-9^{\frac{1}{2}}\cdot 27^{-\frac{1}{3}}}{\left(\frac{1}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}}-216^{-\frac{1}{3}}}$.

2. Вычислить.

1. а) $10^{3\lg 2-1}$; б) $\log_{16} 0{,}5$; в) $\dfrac{\log_2 64}{\log_2\sqrt{16}}$.

2. а) $100^{\lg\sqrt{5}}$; б) $\log_{64}\dfrac{1}{16}$; в) $10^{2-3\lg 5}$.

3. а) $5^{-6\log_5 2}$; б) $\log_{\frac{8}{27}}\dfrac{81}{16}$; в) $\dfrac{\lg 4}{\lg 64-\lg 8}$.

4. а) $36^{0{,}5-\log_6\sqrt{5}}$; б) $\log_{0{,}09}\sqrt{0{,}027}$; в) $\dfrac{\lg 81}{\lg 9}$.

5. а) $49^{\frac{1}{2}+\log_7 2}$; б) $\log_4 8^7$; в) $\dfrac{\lg 4}{\lg 16-\lg 8}$.

6. а) $10^{3-2\lg 5}$; б) $\log_{\frac{1}{16}}\sqrt[3]{4}$; в) $2\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}+1)-\log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{3}+2)$.

3. Прологарифмировать выражение.

1. $x=\left(\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{1000}}\right)^7$. 2. $x=\left(\sqrt[3]{\dfrac{10}{a}}\right)^5$. 3. $x=\dfrac{10\cdot\lg a}{\lg a^3}$. 4. $x=\sqrt[3]{\dfrac{a}{\sqrt{ab}}}^{\,-2}\sqrt{\dfrac{a}{b}}$.

4. Найти x, если:

1. $\lg x=5\lg 2-\lg 2$.

2. $\lg x=2-\lg 5$.

3. $\lg x=3\lg a+2\lg b-1$.

4. $\lg x=2-4\lg a+\dfrac{1}{2}\lg b$.

5. Решить уравнения:

$3^{x^2-17x+63\cdot 5}=27\sqrt{3}.$; $\quad 100^x=0{,}1(10^{x-1})^5.$; $\quad \left(\dfrac{1}{36}\right)^{-10\sqrt{x}}=2^{5x}\cdot 3^{5x}$.

6. Решить неравенство:

1. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\dfrac{1}{81}$.

2. $0{,}2^{x^2-7x+12}>1$.

3. $2^{x^2-8x+19}>16$.

4. $(x^2-8x+16)^{x-6}<1$.

5. $\log_2(x-3)<1$.

6. $\lg\dfrac{x-4}{2-x}>0$.

7. $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5)>\log_{\frac{1}{5}}(x+1)$.

8. $\log_x(x^2+1)>2$.

Тема 3: Основы тригонометрии.

1.Понятие угла в тригонометрии.

Аргументом тригонометрической функции является угол, дуга.

Единицы измерения:

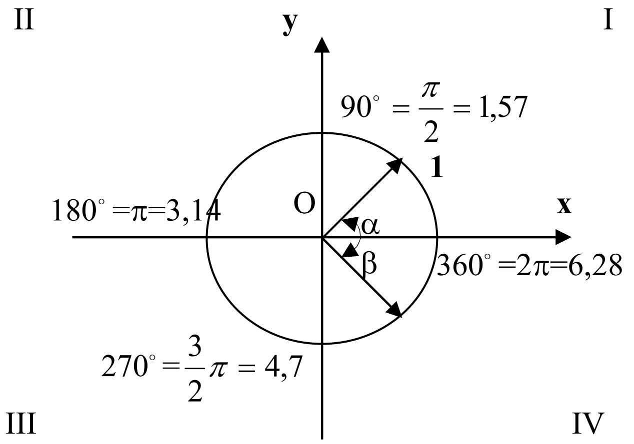
$1^\circ = \frac{1}{360} окр.$ $\quad 1' = \frac{1}{60} \cdot 1^\circ$ $\quad 1'' = \frac{1}{60} \cdot 1'$

1 рад - это угол, который опирается на дугу, равную радиусу числовой единичной окружности.

$$\left.\begin{aligned} 360^0 &= 2\pi \cdot 1рад \\ 180^0 &= \pi \cdot 1рад \end{aligned}\right\} \qquad 1рад = \frac{180^0}{\pi}$$

тогда

$$\alpha^\circ = \frac{\alpha рад * 180^\circ}{\pi} \qquad \alpha_{рад} = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ}$$



$\alpha > 0$ положительный угол - при движении вектора против часовой стрелки;

$\beta < 0$ отрицательный угол - при движении вектора по часовой стрелке.

Практическая работа №1.

1. Выразить в радианах:

10°; 30°; 45°; 60°; 90°; 120°; 135°; 150°; 180°; 210°; 225°; 240°; 270°; 330°; 360°.

2. Найти градусную меру дуг:

$\frac{5}{36}\pi; \frac{7}{12}\pi; \frac{11}{18}\pi; \frac{5}{9}\pi; \frac{11}{20}\pi; \frac{7}{15}\pi; \frac{13}{30}\pi; \frac{11}{6}\pi; \frac{4}{3}\pi; \frac{3}{4}\pi;$

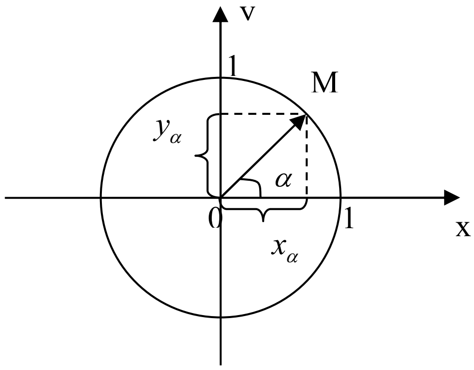
3. Укажите, в какой четверти единичной окружности оканчиваются дуги:

230°; -315°; -110°; 1020°; -580°; 2325°;

$\frac{2}{5}\pi; -\frac{4}{3}\pi; -\frac{8}{5}\pi; \frac{15}{4}\pi; -\frac{23}{6}\pi;$

0,53; 5,2; -7,5; 19; -21,7; 3,5.

2.Определение тригонометрических понятий в числовой единичной окружности.



$$\alpha \to M_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$$

тогда: $x_\alpha = \cos\alpha$

$y_\alpha = \sin\alpha$

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = ctg\alpha$$

3. Основные блоки тригонометрических формул.

1.Основное тригонометрическое тождество:

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1$

2.Теоремы сложения или тригонометрические функции суммы и разности двух углов.

1. $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
2. $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$
3. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
4. $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
5. $tg(\alpha+\beta) = \dfrac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha tg\beta}$
6. $tg(\alpha-\beta) = \dfrac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha tg\beta}$

3.Формулы двойного аргумента.

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$$

$$ctg 2\alpha = \frac{ctg^2\alpha - 1}{2ctg\alpha}$$

4.Тригонометрические функции половинного аргумента.

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

5.Преобразование произведения в сумму.

6. Преобразование суммы и разности тригонометрических формул в произведение.

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

4.Формулы приведения.

Служат для того, чтобы привести тригонометрические функции любого угла к тригонометрическим функциям острого угла.

Алгоритм составления формул приведения:

1. Представим угол в виде: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$; $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$

2. Если угол откладывается от оси OY т.е. имеет вид: $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$; $\frac{3}{2}\pi \pm \alpha$, то при переходе к острому углу заданная функция заменяется на сходственную.

Если угол откладывается от оси OX, т.е. имеет вид: $\pi \pm \alpha$; $2\pi \pm \alpha$, то функция не изменяется.

3. Знак правой части вычисляется по знаку левой части.

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - \alpha\right) = -\sin\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$tg(\pi + \alpha) = tg\alpha \qquad ctg(\pi - \alpha) = -ctg\alpha \qquad tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = ctg\alpha$$

Таблица значений тригонометрических понятий для наиболее встречающихся углов.

		30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	0	Не сущ.	0
ctg	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не сущ.	0	Не сущ.

Практическая работа №2.

1. Дано: $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\alpha \in \left]\pi; \frac{3}{2}\pi\right[$

Найти: $\sin\alpha$; $tg\alpha$; $ctg\alpha$;

2. Дано: $tg\alpha = -\frac{3}{4}$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$

Найти: $\sin\alpha$; $\cos\alpha$; $ctg\alpha$;

3. Упростить:

1. $\sin^2\alpha + tg^2\alpha + \cos^2\alpha$
2. $\frac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha} + \frac{ctg\alpha}{1-ctg^2\alpha}$
3. $\left(1 - \frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot ctg^2\alpha$
4. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^4\alpha$
5. $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
6. $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + tg\alpha$

4. Упростить:

1. $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$
2. $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) - \cos^2\alpha$
3. $\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$
4. $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha$

5. Докажите тождество:

1. $2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha = 1$
2. $\frac{1+\cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha$
3. $\frac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha} = tg\alpha$
4. $\frac{1-\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = tg\alpha$

6. Упростить:

1. $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$
2. $\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$
3. $1-\cos 40^\circ$

7. Упростить:

1. $\sin 20^\circ + \sin 70^\circ$
2. $\cos 40^\circ + \cos 20^\circ$
3. $\frac{\sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$
4. $\sin 16^\circ + \sin 26^\circ - \sin 42^\circ$
5. $\sqrt{2}\sin\alpha - 1$
6. $\frac{1}{2} + \cos\alpha$

8. Упростить:

1. $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}\cdot\frac{tg(\alpha-\pi)}{ctg(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{3}{7}\pi-\alpha\right)}$
2. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

9. Вычислить:

1. $\cos(-585^\circ) - tg(-1395^\circ) + ctg(-630^\circ) - \sin(-9135^\circ)$
2. $\sin(-810^\circ) + \cos(-900^\circ) + tg(-935^\circ)ctg575^\circ$
3. $\sin 1200^\circ - 3tg(-930^\circ) - \cos 1410^\circ$
4. $\cos 510^\circ + \sin(-480^\circ) + \cos(-840^\circ) + \sin 1230^\circ$
5. $\sin\left(-\frac{13}{6}\pi\right) + \cos\frac{17}{3}\pi + tg\frac{22}{3}\pi + ctg\left(-\frac{37}{4}\pi\right)$
6. $\sin\left(-\frac{47}{3}\pi\right) - tg\frac{21}{4}\pi + tg\left(-\frac{23}{4}\pi\right) - ctg\frac{19}{6}\pi$

5.Обратные тригонометрические понятия.

Обратные тригонометрические понятия служат для того, чтобы по данному значению функции найти аргумент (угол, дугу):

$\arcsin\frac{1}{2} = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$ $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ $arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$

$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$ $\arccos 1 = 0$ $arcctg\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{3}$

$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ $arctg 1 = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$ $arcctg 0 = \frac{\pi}{2}$

Свойства чётности и нечётности обратных тригонометрических понятий.

$\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $arctg(-x) = -arctg x$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ $arcctg(-x) = \pi - arcctg x$

Практическая работа №3.

1. Вычислить:

1. $\arcsin 1;\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right);\ \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right);\ \arcsin 0;$

2. $\arccos(-1);\ \arccos\frac{\sqrt{3}}{2};\ \arccos\left(-\frac{1}{2}\right);\ \arccos 0;$

3. $arctg(-1);\ arctg(-\sqrt{3});\ arctg\frac{\sqrt{3}}{3};\ arctg 0;$

4. $arcctg 1;\ arcctg\sqrt{3};\ arcctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\ arcctg 0;$

2. Найти:

1. $\arcsin\frac{1}{2} + arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ **2.** $arcctg(-\sqrt{3}) - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos 1$

3. $2\sin(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}) + \cos(\arccos 1) - \arccos\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ **4.** $\sin 2(\arccos\frac{1}{2})$

6.Простейшие тригонометрические уравнения.

Решение любого тригонометрического уравнения заключается в приведении его к простейшему виду.

Основные простейшие тригонометрические уравнения:

$\sin x = m \quad \lvert m\rvert \le 1$	$x = (-1)^k \arcsin m + \pi k$
$\cos x = m \quad \lvert m\rvert \le 1$	$x = \pm\arccos m + 2\pi k$
$tgx = m$	$x = arctgm + \pi k$
$ctgx = m$	$x = arcctgm + \pi k$

Решить уравнения:

1. $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 0;$ 7. $\sin(2x + \frac{\pi}{3}) = 1;$

2. $2\sin x = -\sqrt{2}$;
3. $\sin 2x = \frac{1}{2}$;
4. $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = 1$;
5. $\cos(2x - \frac{\pi}{4}) = -1$;
6. $\cos 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
8. $\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;
9. $\tan 2x = -\sqrt{3}$;
10. $3\tan\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$;
11. $\cot(2x + 45°) = -1$;
12. $\cot\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$;

7.Задания для внеаудиторной самостоятельной работы по тригонометрии.

1. Упростить:

1. $\left(\frac{1+\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \sin\alpha\right)\frac{1}{2}tg\alpha$;

2. $ctg\alpha\left(\frac{1+\sin^2\alpha}{\cos\alpha} - \cos\alpha\right)$;

3. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$;

4. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}$;

5. $\frac{\sin 24^\circ + \sin 6^\circ}{\cos 24^\circ + \cos 6^\circ}$;

6. $\frac{\cos\alpha - \cos 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$;

7. $\cos 20^\circ + \cos 100^\circ + \cos 140^\circ$;

8. $\frac{\sqrt{3}\left(\cos 75^\circ - \cos 15^\circ\right)}{1 - 2\sin^2 15^\circ}$;

9. $\frac{2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1}{1 + 8\sin^2\frac{\pi}{8}\cos^2\frac{\pi}{8}}$;

10. $\frac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha}$;

11. $\frac{\sin(-\alpha) + \cos(\pi+\alpha)}{1 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}$;

12. $\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right) + \sin(2\pi+\alpha)}{2\cos(-\alpha)\sin(-\alpha)+1}$;

13. $\frac{\cos 750^\circ + \sin 420^\circ}{\sin(-330^\circ) - \cos(-390^\circ)} - \frac{1+\cos 1880^\circ tg(-420^\circ)}{tg 420^\circ}$;

14. $tg(-432^\circ)tg 18^\circ + \cos(-302^\circ)\cos 508^\circ -$
$-\cos 32^\circ \cos 122^\circ$;

15. $\sin(-385^\circ)\sin 1555^\circ - \sin(-295^\circ)\sin 4165^\circ -$
$-\cos 1050^\circ$.

2. Решить уравнения:

1. $\cos(4-2x) = -\frac{1}{2}$;

2. $\sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$;

3. $2\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$;

4. $3 + 4\sin(2x+1) = 0$;

5. $\left(1 + \sqrt{2}\cos x\right)\left(1 - 4\sin x \cdot \cos x\right) = 0$;

6. $tg\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$;

7. $2\sin^2 x + \sin x = 0$;

8. $6\sin^2 x - 12\cos x + 7 = 0$;

11. $4\sin 3x + 5\cos 3x = 0$;

12. $5\sin x + \cos x = 5$;

13. $\cos 4x + \cos 3x = 0$;

14. $\sin 3x = \sin 5x$;

15. $\cos^2 3x - \cos 3x \cos 5x = 0$;

16. $2\sin^2 x - \sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

17. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 1 = 0$;

18. $19\sin^2 x + 60\sin x\cos x + 25\cos^2 x = 25$;

9. $8\cos^2 x - 12\sin x + 7 = 0$;

10. $2\sin 2x = 3\cos 2x$;

19. $1 - \sin x\cos x + \sin x - \cos x = 0$;

20. $5\sin x tgx - \sin x - 5tgx + 1 = 0.$

3. Решение прямоугольных треугольников.

1. Дано: c=30,0 a=$36^\circ 52'$
2. Дано: c=20,5 b=13,5
3. Дано: a=14,4 b=16,5
4. Дано: b=47,4 a=$16^\circ 40'$

Решение косоугольных **треугольников.**

1. Дано: a=14,5 b=$48^\circ 40'$ c=$64^\circ 20'$
2. Дано: a=400 b=347 c=$82^\circ 30'$
3. Дано: a=150 b=135 c=255
4. Дано: a=9,8 b=12,3 c=69°27´

Тема 4: Основные элементарные функции: определение, свойства, график.

1.Основные свойства функций:

Определение:

Переменная величина у называется функцией переменной величины х, если каждому значению переменной х из области определения соответствует единственное значение у.

Y=$f(x)$ x – аргумент, независимая переменная

y – функция, зависимая переменная

Способы задания: Аналитический, табличный, графический, описательный.

Основные элементарные функции:

1.Линейная функция: y=kx+b

2.Квадратная функция: $y = ax^2 + bx + c$

3.Степенная функция: $y = x^\alpha$; α - действительное число

4.Показательная функция: $y = a^x$; a>0, $a \neq 1$

5.Логарифмическая функция: $y = \log_a x$; a>0, $a \neq 1$

6.Тригонометрические функции: y=sin$x$, y=cos$x$, y=tg$x$, y=ctg$x$

7.Обратные тригонометрические функции: y=arcsin$x$, y=arccos$x$, y=arctg$x$, y=arcctg$x$.

Основные свойства функции:

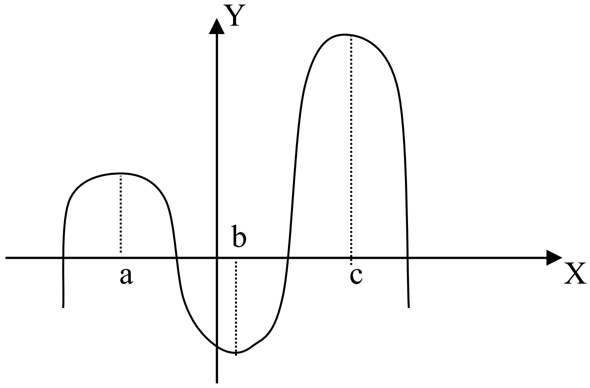
1. Область определения;
2. Область значения;
3. Чётность и нечётность;
4. Периодичность;
5. Возрастание и убывание;
6. Точки максимума и минимума;
7. Выпуклость, вогнутость графика. Точка перегиба.

Определение:

1. Область определения функции– это те значения аргумента, при которых функция имеет смысл.
2. Область значений функции – те значения, которые принимает функция.
3. Функция $y=f(x)$ называется чётной, если для любого х из области определения выполняется условие $f(-x)=f(x)$, нечётной, если $f(-x)=-f(x)$.
4. Функция $f(x)$ называется периодической, если существует число $l \neq 0$ такое, что для любого х из области определения выполняется равенство $f(x-l)=f(x+l)=f(x)$.
5. Числовая функция $f(x)$ называется строго возрастающей, если для любых x_1 и x_2 из области определения таких, что $x_1 < x_2$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$; убывающей, если при $x_1 < x_2$ => $f(x_1) > f(x_2)$

6. Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



7. График функции $y = f(x), x \in [a;b]$ называется выпуклым на интервале [a;b], если он расположен ниже касательной, проведённой в любой его точке.

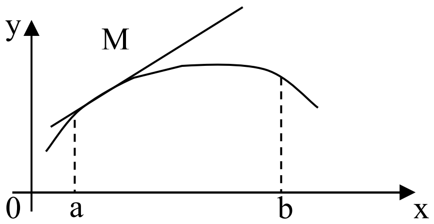
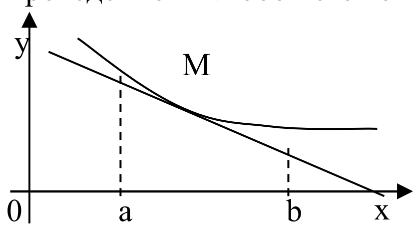


График функции $y = f(x), x \in [a;b]$**,** называется вогнутым на интервале [a;b], если он расположен выше касательной, проведённой в любой его точке.



Точка графика функции, отделяющая выпуклую часть от вогнутой, называется точкой перегиба.

Практическая работа:

1. Найти область определения функции:

1. $y = x^3 + \frac{x^2}{2} + 4x - 1;$

2. $y = \frac{1}{15x^2 + x - 2};$

3. $y = \sqrt{21 - 4x - x^2};$

4. $y = \sqrt{6 - 2x} + \sqrt{2x - 5};$

5. $y = \frac{2x - 3}{\sqrt{3x - x^2}};$

6. $y = \frac{\sqrt{5x - 6}}{x^2 - 9}.$

2. Найти область изменения функции:

1. $y = \frac{3}{x^2};$ **2.** $y = -\frac{9}{x};$ **3.** $y = 16 - 2x^2;$ **4.** $y = \sqrt{12 - 4x}.$

3. Найти обратные функции:

1. $y = 5x - 3;$ **2.** $y = \frac{8}{2 - 3x};$ **3.** $y = \frac{5}{4 - x} + 3;$ **4.** $y = \sqrt{3 - 2x};$ **5.** $y = \frac{3}{\sqrt{2 - x^2}}.$

4. Установить чётность и нечётность функции:

1. $y = x^3 - 6x$; **4.** $y = \dfrac{x^2}{x^4 - 1}$; **7.** $y = \sqrt{4 - x}$;

2. $y = 3x^4 - 2x^2 + 5$; **5.** $y = \dfrac{x}{1 + x^2}$; **8.** $y = \sqrt{3x - 4x^2}$;

3. $y = \dfrac{3}{5x^2 - 6}$; **6.** $y = \dfrac{4x}{x^2 + 5x}$; **9.** $y = x - \dfrac{1}{x}$.

5. Исследовать функцию на монотонность:

1. $y = 3x + 5$; **4.** $y = 1 - 4x^2$; **7.** $y = \sqrt{x}$;

2. $y = 4 - 7x$; **5.** $y = \dfrac{2}{x}$; **8.** $y = -\dfrac{1}{x + 2}$;

3. $y = 3x^2$; **6.** $y = \dfrac{6}{x^2}$; **9.** $y = \sqrt{2x - 1}$.

6. Исследовать свойства функции и построить схему графика функции:

1. $y = x^2 - 3$; **4.** $y = -\dfrac{4}{x}$; **7.** $y = \sqrt{x + 1}$;

2. $y = 4 - x^2$; **5.** $y = \dfrac{2}{x^2}$; **8.** $y = -\sqrt{2 - x}$;

3. $y = \dfrac{3}{x}$; **6.** $y = -\dfrac{5}{x^2}$; **9.** $y = \dfrac{1}{x^2 - 4}$.

2.Степенная, показательная, логарифмическая функции.

Степенная функция: определение, свойства, график.

Степенной функцией называется функция вида $f(x) = x^a$, где a – любое действительное число.

Свойства степенной функции:

1) Область определения:

а – натуральное число $x \in (-\infty;+\infty)$

а – целое, отрицательное число $x \in (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$

а – не целое число $x \in (0;+\infty)$

2) Область изменения – множество всех положительных чисел.

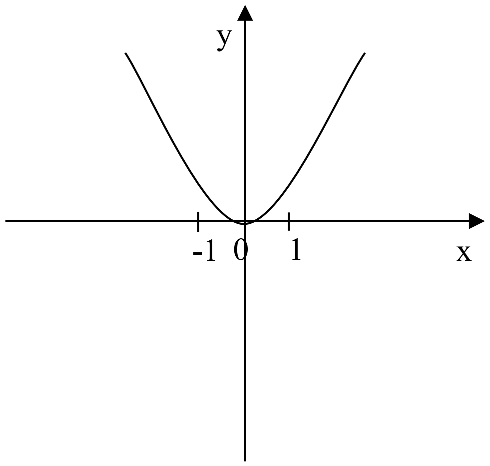
а – четное число $y \in (0;+\infty)$

а – нечетное число $y \in (-\infty;+\infty)$

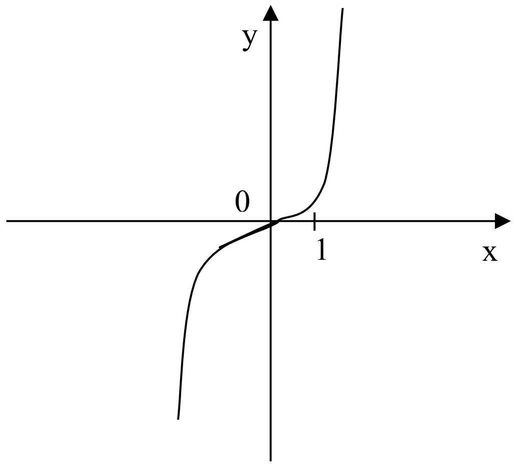
3) Степенная функция непереодична, является *четной* при *а – четном* и *нечетной* при *а – нечетном*.

Графики степенной функции:

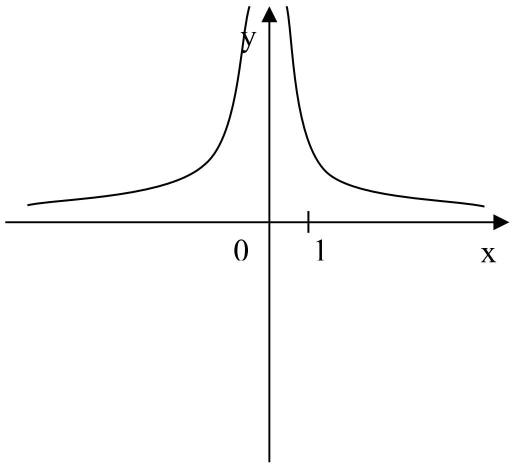
$\alpha -$ *натуральное, четное*



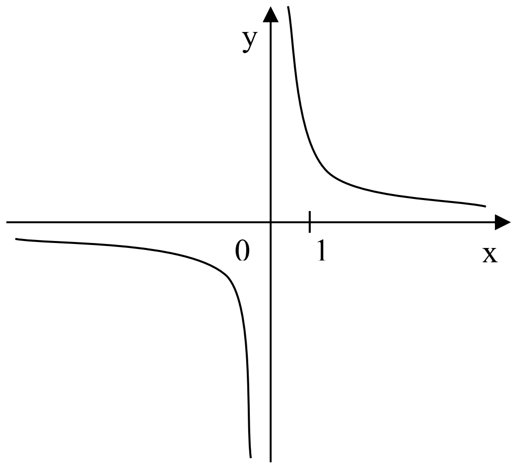
$\alpha -$ *натуральное, нечетное*



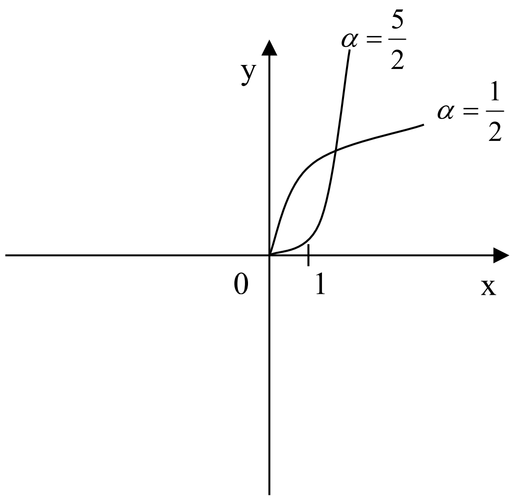
$\alpha -$ *целое, отрицательное, четное*



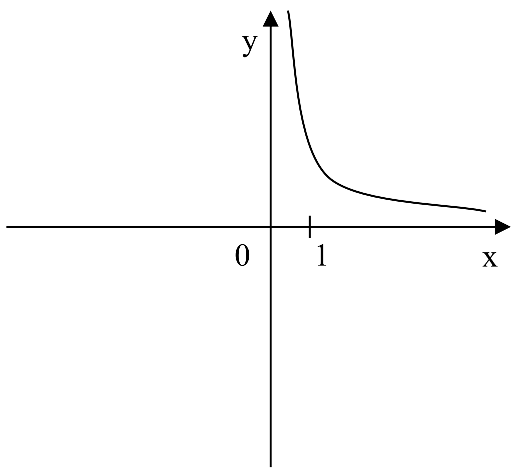
$\alpha -$ *целое, отрицательное, нечетное*



$\alpha -$ *положительное, нецелое*



$\alpha -$ *отрицательное, нецелое*



Показательная функция: определение, свойства, график.

Определение: Показательная функция - это функция вида: $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$

Свойства:

1. $x \in (-\infty;+\infty)$

2. $y \in (0;+\infty)$

3. $f(-x)=a^{-x}=\frac{1}{a^x}$; ни чётная, ни нечётная

4. непериодичная, непрерывная.

$a>1$ - возрастающая функция

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$

$0<a<1$ - убывающая функция

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x=0$;

$\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=\infty$

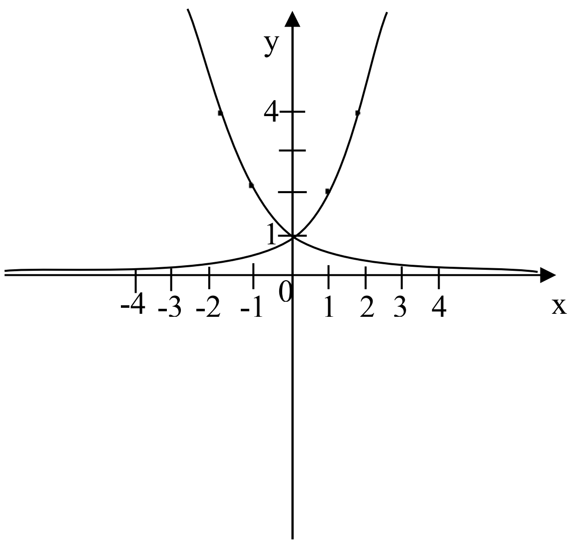
Построить график функции:

Дано: $y=2^x$ $(a>1)$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

Дано: $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$; $(0<a<1)$

x	-2	-1	0	1	2
y	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$



Логарифмическая функция: определение, свойства, график.

Определение: Логарифмической функцией называется функция вида:

$y=\log_a x$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Если *a=e*, то *y=lnx; a=10, то y*=lg*x*

Свойства:

1. $x\in(0;+\infty)$

2. $y\in(-\infty;+\infty)$

3. $f(-x)=\log_a(-x)$; ни чётная, ни нечётная.

4. непериодичная, непрерывная.

$a>1$ - возрастающая функция

$\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=-\infty$

$0<a<1$ - убывающая функция

$\lim\limits_{x\to+\infty}\log_a x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 0}\log_a x=+\infty$

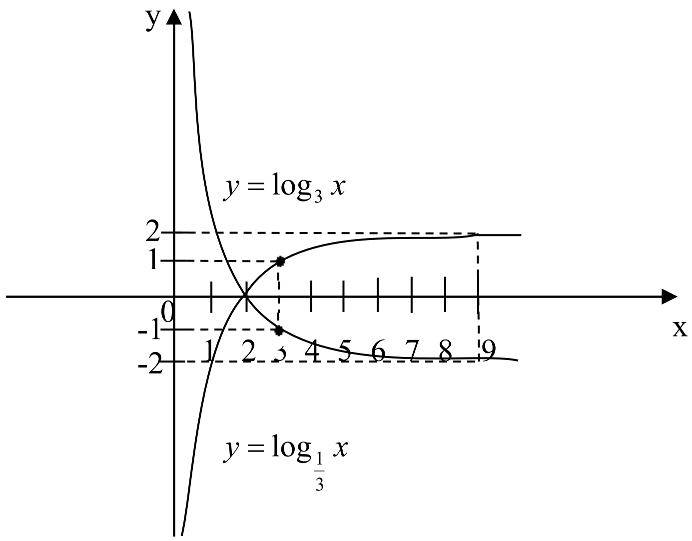
Построить график функции:

Дано: $y=\log_3 x;(a>1)$

Дано: $y=\log_{\frac{1}{3}} x;(0<a<1)$

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	-2	-1	0	1	2

x	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
y	2	1	0	-1	-2



Проверь себя:

Найти область определения функции:

1. $y = \dfrac{1}{5^{3x^2-7x-6}}$ 4. $y = \log_{x^2}(8-2x)$

2. $f(x) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^{\sqrt{6+x-x^2}}$ 5. $y = \log_{2x-3}(4-x^2)$

3. $z(x) = \dfrac{7}{25-0.2^x}$ 6. $y = \dfrac{1}{\log_2 x - 3}$

Найти множество значений функции:

а) $y = \dfrac{3}{2^x}$ б) $y = \lg^2(x-1)$ в) $y = \log_4 2^x$

Какие значения может принимать основание показательной функции $y = a^x$, если:

а) $a^{-\frac{2}{3}} > a^{\frac{5}{3}}$ б) $a^{\frac{7}{8}} > a^{\frac{11}{8}}$ в) $a^{\frac{3}{5}} > a^{0,6}$ г) $a^{-2} > a^{-0,6}$ д) $a^{-\frac{1}{2}} > a^{0,2}$ е) $a^{\sqrt{3}} > a^{\sqrt{2}}$

Доказать справедливость следующего числового ряда:

1) $\lg\sqrt[6]{10} < \log_2\sqrt{2}$ 2) $\log_4 5 > \log_6 5$ 3) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{3} < \log_{\frac{1}{2}}\sqrt{2}$ 4) $\dfrac{1}{2} + \lg 3 < \lg 19 - \lg 2$

5) $\dfrac{\lg 5 - \lg\sqrt{7}}{2} < \lg\dfrac{5+\sqrt{7}}{2}$ 6) $5^{1+\log_5 3} > 25^{\log_5 3}$

Решить графически:

1) $3^x = 4-3x$ 2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = x^2-2x-3$ 3) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^x = 5-x^2$ 4) $4^x < 3$

5) $\log_2 x = 3 - \dfrac{x}{2}$ 6) $\log_{\frac{1}{2}} x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$ 7) $\log_{2,5} x = 2 - x - 2x^2$ 8) $\log_{0,7} x > x^2 - 3x$

Домашнее задание:

Найти О.О.Ф

1. $y=\dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{3}\right)^x-9}$

2. $y=\log_{x+3}(12-3_x)$

Решить графически

1. $\left(\dfrac{3}{4}\right)^x=\log_{0,2}x$

2. $\log_2(1-x)=\dfrac{-x+2}{4}$

3.Тригонометрические функции.

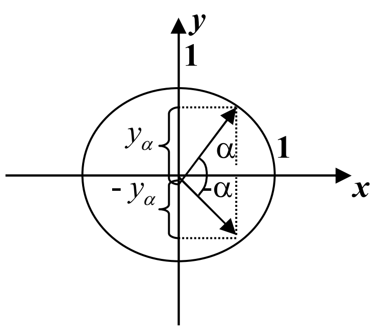
1. y = sin x

Синусом острого угла называется ордината т. M_α числовой единичной окружности.

1. $x\in(-\infty;+\infty)$

2. $y\in[-1;1]$

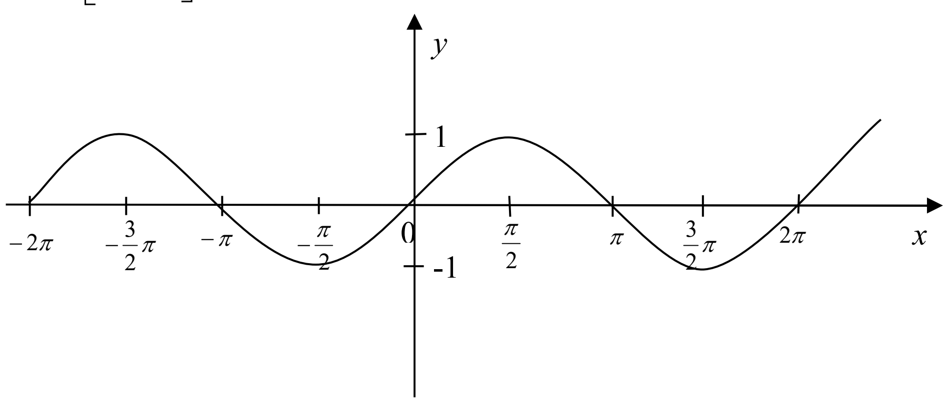
3. *y(-x)=sin(-x) =-sinx* нечетная, т.к. $sin(-\alpha)=-y_\alpha=-sin\alpha$



4. 2π - период $sin(\alpha+2nk)=sin\alpha$, k - целое

5. $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$-возрастает $+2\pi k$

$x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3}{2}\pi\right]$ -убывает $+2\pi k$



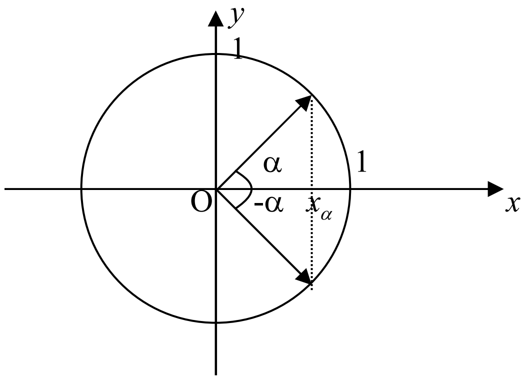
2. *y=cosx*

Косинусом острого угла называется абсцисса т. M_α числовой единичной окружности.

1. $x\in(-\infty;+\infty)$

2. $y\in[-1;1]$

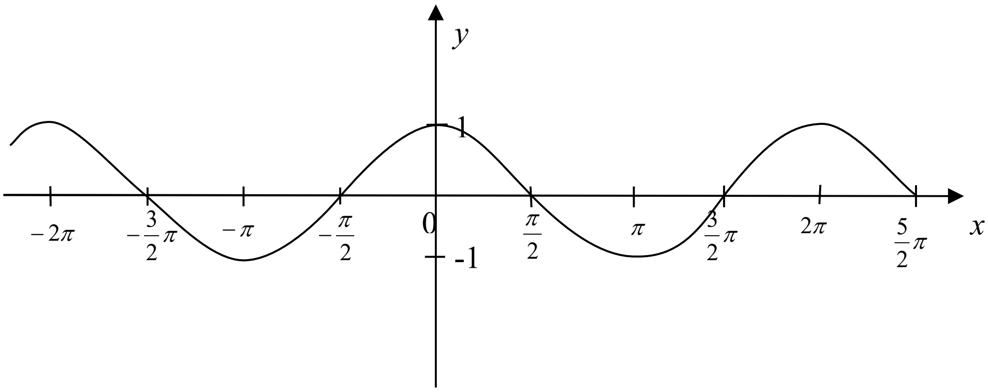
3. *y(-x)=cos(-x)=cosx* четная, т.к. $cos(-\alpha)=x_\alpha=cos\alpha$



4. 2π - период $cos(\alpha+2\pi k)=\cos\alpha$ k - целое

5. $x \in [-\pi;0]$ -возрастает $+2\pi k$

$x \in [0;\pi]$ - убывает $+2\pi k$

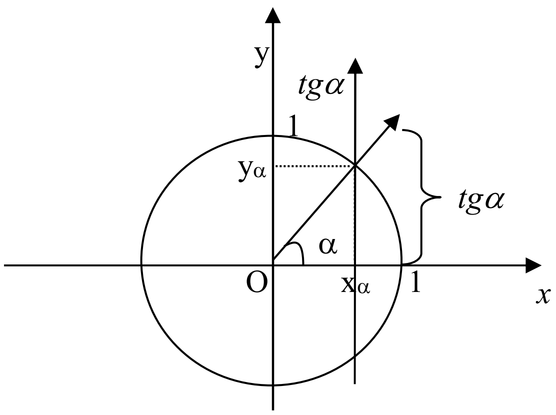


3 y = tgx = $\frac{\sin x}{\cos x}$

1. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi \kappa$

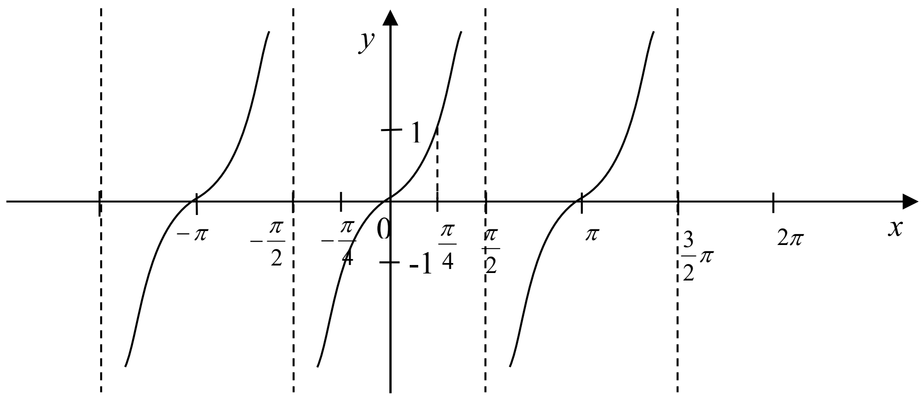
2. $y \in (-\infty;+\infty)$

3. $y(-x) = \mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}x$ нечетная, т.к. $tg(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx$



4. π - период tg(α+πκ) = tgα, κ - целое число

5. $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ $+\pi k$ возрастает

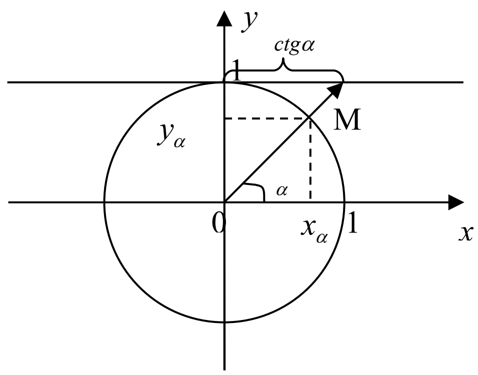


4 y = ctg *x* = $\dfrac{\cos x}{\sin x}$

1. x $\neq \ \pi k$, к $\in$ z

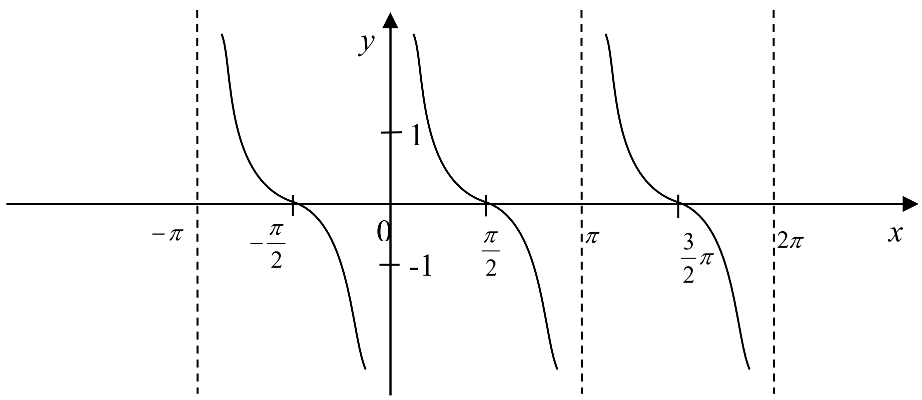
2. $y \in (-\infty;+\infty)$

3. y(-*x*) = ctg(-*x*) = -ctg*x* нечетная, т.к. $ctg\,(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos x}{-\sin x} = -ctgx$



4. π - период ctg*(*α*+* π *k)*=ctgα*, k-целое число*

5. $x \in (0;\pi) + \pi k$ - убывает



4. Обратные тригонометрические функции:

1 _y=arcsinx

Arcsin α, $|\alpha| \le 1$ называется угол, дуга из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *sin* которого равен α.

1. $x \in [-1;1]$

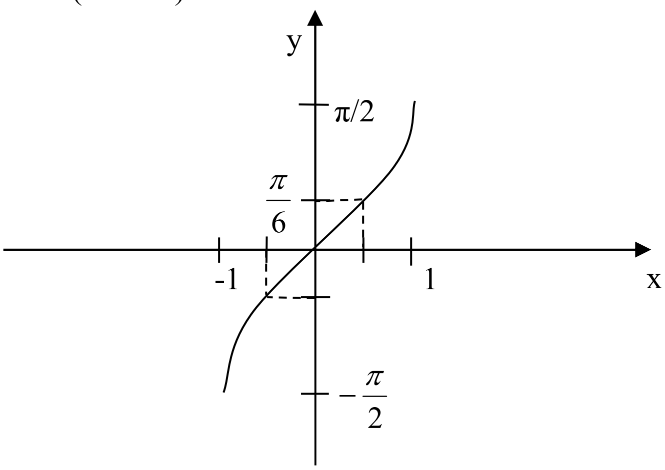
2. $y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$

3. Нечётная - *arcsin(-x)=-arcsinx*

4. Непериодическая

5. Возрастающая

6. sin(arcsinx)=x



2. y=arccosx

Arccos α, , называется угол, дуга из промежутка , *cos* которого равен α.

1. $x \in [-1;1]$

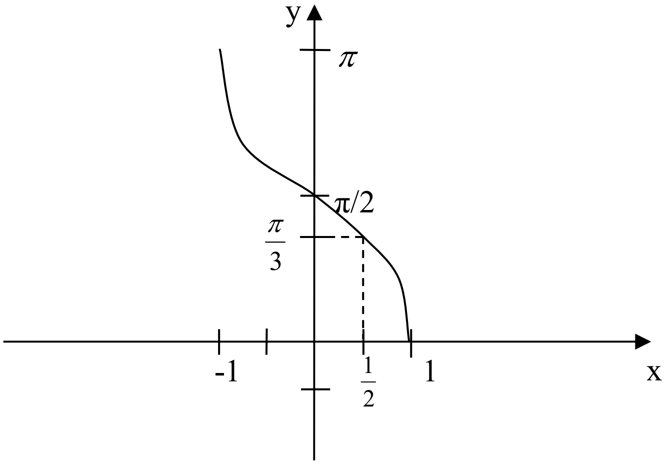
2. $y \in [0;\pi]$

3. Ни чётная, ни нечётная: $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4. Непериодическая

5. Убывающая

6. *cos(arccosx)=x*



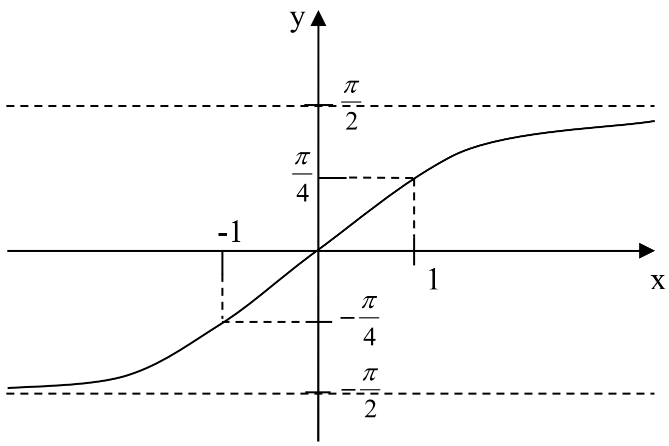
3 y=arctgx

Arctg α называется угол, дуга из промежутка $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, *tg* которого равен α.

1. $x \in (-\infty; \infty)$

2. $y \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$

3. Нечётная: *arctg(-x)=-arctgx*
4. Непериодическая
5. Возрастающая
6. *tg(arctgx)=x*



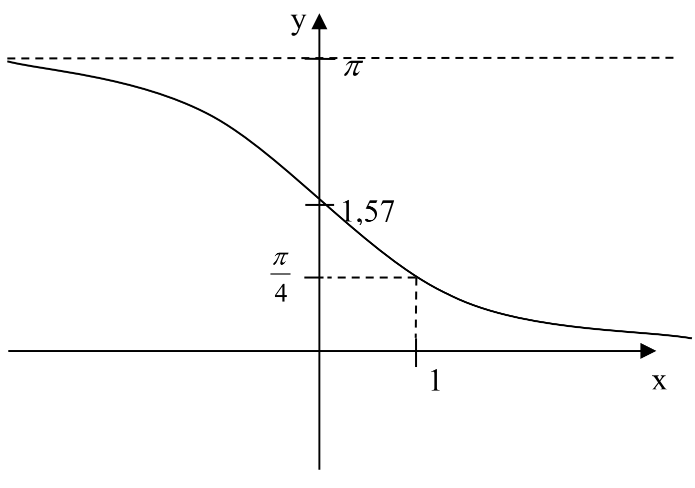
4 y=arcctgx
Arcctg a называется угол, дуга из промежутка $]0;\pi[$, *ctg* которого равен α.

1) $x \in (-\infty; +\infty)$

2) $y \in]0;\pi[$

3) Ни чётная, ни нечётная: $arcctg\ (-x) = \pi - arcctgx$

4) Непериодическая
5) Убывающая
6) *ctg(arcctgx)=x*



Тема 6: Векторы на плоскости и в пространстве.

1.Векторы на плоскости: определение, виды, действия над векторами.

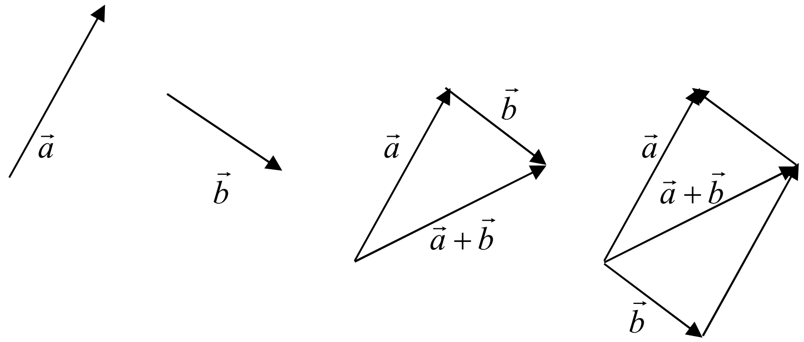
Определение: Вектором называется направленный отрезок.

Виды векторов: нулевой, равные, коллинеарные, одинаково направленные, противоположно направленные.

Действия над векторами:

1.1.Сложение векторов:

Правило треугольника и параллелограмма.

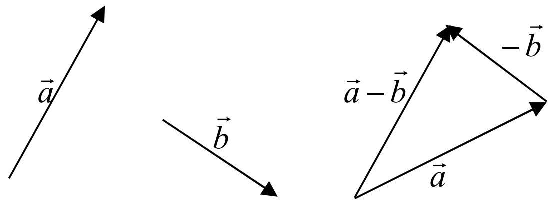


Свойства сложения: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ - переместительный закон

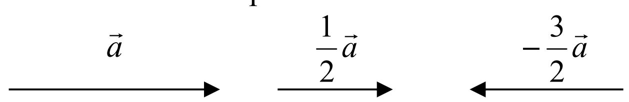
$\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ - сочетательный закон

1.2. Вычитание векторов:

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$



1.3. Умножение вектора на число:



Свойства:

$m\left(n\cdot\vec{a}\right)=\left(m\cdot n\right)\vec{a}$ - сочетательный закон

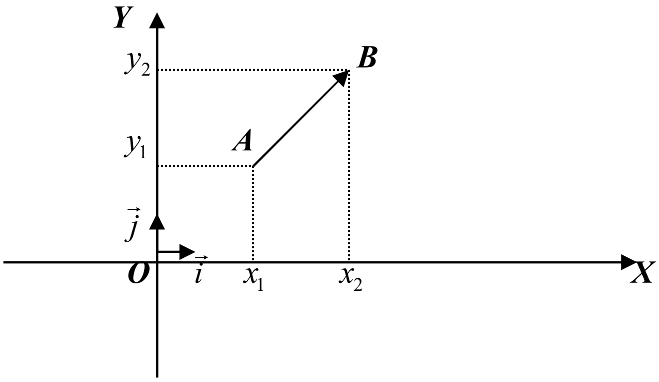
$m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{a}=\left(m+n\right)\vec{a}$ - I распределительный закон

$m\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}=m\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ - II распределительный закон

2.Координаты вектора на плоскости

Определение: Базисом на плоскости называется два неколлинеарных вектора этой плоскости взятых в определённом порядке.

Прямоугольный базис: образуют вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$ если $\left|\vec{i}\right|=\left|\vec{j}\right|=1$; $\vec{i}\perp\vec{j}$; $0\in\vec{i},\vec{j}$



Пусть: $A(x_1;y_1)$ $B(x_2;y_2)$ **Тогда:**

$\vec{AB}\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ $x_1 = np_{0x}A$ $y_1 = np_{0y}A$ координаты т. A

Пусть: координаты $\overrightarrow{AB}\{x,y\}$

Тогда: $x = np_{0x}\vec{AB}$ $x = x_2 - x_1$

$y = np_{0y}\vec{AB}$ $y = y_2 - y_1$

$\boxed{\vec{AB} = x\vec{i} + y\vec{j}}$ разложение $\vec{AB}$ в прямоугольном базисе.

3. Действие над векторами, заданными своими координатами.

3.1. При сложении векторов, соответственные координаты складываются.

Дано: $\vec{a}\{x_1,y_1\}$

$\vec{b}\{x_2,y_2\}$

Доказать: $\vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2,y_1+y_2\}$

Доказательство: $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$

$\vec{a}+\vec{b} = (x_1\vec{i}+y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i}+y_2\vec{j}) = (x_1+x_2)\vec{i} + (y_1+y_2)\vec{j} \Rightarrow \vec{a}+\vec{b}\{x_1+x_2,y_1+y_2\}$

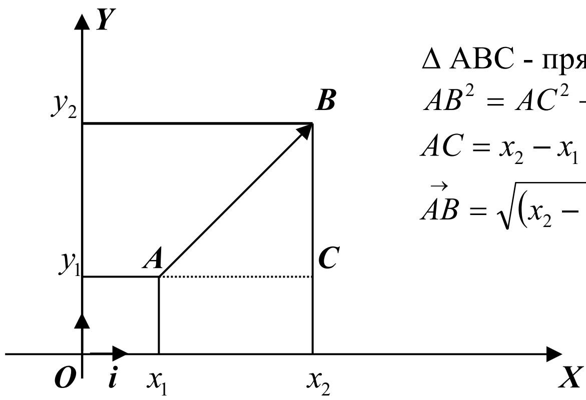
3.2. При вычитании векторов соответственные координаты вычитаются.

3.3. При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

4.Длина вектора

Пусть $A\{x_1,y_1\}, B\{x_2,y_2\}$ тогда $\vec{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

Доказательство:



Δ ABC - прямоугольный

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AC = x_2 - x_1$ $BC = y_2 - y_1$

$\vec{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

5. Скалярное умножение векторов.

Определение: Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на cos угла между ними.

$$\overrightarrow{ab} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Свойства скалярного произведения:

5.1. Для того чтобы два нулевых вектора были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение было равно 0.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

5.2. Свойство коммутативности: $\vec{a} * \vec{b} = \vec{b} * \vec{a}$

5.3. Свойство ассоциативности: $\left(k * \vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} * \vec{b}\right)$

Скалярное произведение в координатной форме:

Дано: $\vec{a}\{x_1, y_1\}$ Доказать: $\vec{a} * \vec{b} = x_1 * x_2 + y_1 * y_2$

$\vec{b}\{x_2, y_2\}$

Доказательство:

$\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1 j$

$\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2 j$

$$\vec{a} * \vec{b} = (x_1 i + y_1 j)(x_2 i + y_2 j) = x_1 x_2 i^2 + y_1 y_2 j^2 + x_1 y_2 \vec{ij} + y_1 x_2 \vec{ij} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

$$\vec{i}^{\,2} = 1 \qquad \vec{j}^{\,2} = 1 \qquad \vec{i} * \vec{j} = \vec{j} * \vec{i} = 0$$

6.Угол между векторами.

$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos\varphi$ скалярное произведение двух векторов.

Отсюда $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} * \vec{b}}{|\vec{a}| * |\vec{b}|} = \dfrac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} * \sqrt{x_2^2 - y_2^2}}$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} * \sqrt{x_2^2 - y_2^2}}}$$

7. Деление отрезка в данном отношении.

Пусть: $A\{x_1, y_1\}$

$B\{x_2, y_2\}$ тогда $x_c = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

С – середина $\overrightarrow{AB}$ $y_c = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

Если М делит $\vec{AB}$ в отношении $\dfrac{\vec{AM}}{\vec{MB}} = \dfrac{m}{n}$, тогда координаты М находят по правилу:

$$x_M = \frac{x_1 + \frac{m}{n} x_2}{1 + \frac{m}{n}} \qquad y_M = \frac{y_1 + \frac{m}{n} y_2}{1 + \frac{m}{n}}$$

Практическая работа:

Задача №1

Какие из данных величин являются скалярными и какие векторными: объём, скорость, температура, масса, длина отрезка, ускорение, сила тока, напряжение электрического поля?

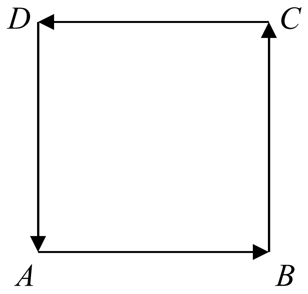
Задача №2

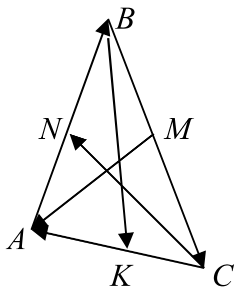
Векторы $\vec{AB}, \vec{BC}, \vec{CD}, \vec{DA}$ совпадает со сторонами квадрата $ABCD$. Какие из данных векторов являются: а коллинеарными; б) равными; в) противоположными?

Задача №3

На сторонах треугольника ABC построить векторы $\vec{AB} = \vec{a}; \vec{BC} = \vec{b}; \vec{CA} = \vec{c}$. а)Чему равна сумма $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$?

б)Точки M,N и K – середины сторон треугольника. Найти векторы $\vec{MA}, \vec{CN}, \vec{BK}$.





в) Три вектора, модули которых равны, имеют общее начало и образуют между собой углы в 120°. Чему равна их сумма?

Задача №4

а)В ромбе $ABCD$ точка M - середина стороны $[CD]$. Выразите $\vec{AM}$ через $\vec{AB}$, $\vec{AD}$.

б)В квадрате $ABCD$ точка O - середина стороны $[BC]$. Выразите $\vec{DO}$ через $\vec{DA}$, $\vec{DC}$.

Задача №5

В параллелограмме $MKED$ точка A – середина стороны $[MK]$. Выразите $\vec{DA}$ через $\vec{MD}$ и $\vec{DE}$.

Задача №6

В параллелограмме $ABCD$: $\vec{AB} = \vec{a}$ и $\vec{AD} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}, \vec{b}$ векторы $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}, \vec{MD}$, где M – ес точка пересечения диагоналей параллелограмма, $\vec{BD}, \vec{AC}, \vec{CB}$.

Задача №7

Дан произвольный вектор $\vec{a}$. Постройте векторы а) $3\vec{a}$; б) $\left(\frac{3}{2}\vec{a}\right)$; в) $-2\vec{a}$; г) $-\left(\frac{2}{3}\right)\vec{a}$.

Задача №8

а) На координатной плоскости даны точки:

$A_1(-1;1), A_2(-0,5;-2), A_3(2,5;2)$, Постройте сумму $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}$

б) Постройте сумму $\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{A_2A_3}+\overrightarrow{A_3A_4}+\overrightarrow{A_4A_5}$, если $A_1(-4;4,2), A_2(6;4,2), A_3(-2;-1), A_4(1;8), A_5(4;-1)$.

в) На координатной плоскости даны точки:

$A(-4;-1), B(1;1,5); C(3,5;5), D(10;6), E(5;-4)$. Постройте $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CE}; \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{BE}-\overrightarrow{CD}$.

Задача №9

Даны векторы $\vec{a}\{4;-2\}$ и $\vec{b}\{6;-3\}$ Вычислите: а) $\vec{a}*\vec{b}$; б) $\vec{a}^2$; в) $\vec{b}^2$; г) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; д) $(\vec{a}-\vec{b})^2$.

Задача №10

Даны векторы: $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}; \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Найти скалярное произведение $\vec{a}*\vec{b}$.

Задача №11

Даны векторы: $\vec{a}=4\vec{i}+\vec{j}; \vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача №12

Вычислите с точностью до 0,1 расстояние между точками:

а) $M_1(2;5)$ и $N_1(3;8)$; б) $M_2(-7;-10)$ и $N_2(-3;0)$;
в) $A(-2;1;3)$ и $B(0;-1;2)$; г) $A(-6;8;0)$ и $D(2;5;-2)$.

Задача №13

Вычислите площадь треугольника с вершинами в точках:

а) $A(-2;-3), B(-2;4), C(3;4)$. б) $A(10;-1), B(0,2;-3), C(4;4,1)$.

Задача №14

а)Найдите точку *M,* равноудалённую от точек $O(0;0), A(7;-7)$ и $B(8;0)$. б)Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2,3), B(3;2,1), C(6,4;4)$. Найдите его четвёртую вершину.

Задача №15

Докажите, что треугольники равнобедренные и прямоугольные, если их вершины изображаются точками а) $A(-3;4), B(4;3), C(0;0)$. б) $A(-4;-2), B(-3;5), C(0;1)$.