

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)**

**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО**

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В Г. ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге**

УТВЕРЖДАЮ

Директор

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.К. Исаев

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г

Рег. № \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

к практическим занятиям

по учебной дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики

по специальности 09.02.07 «Информационные системы и программирование»

Таганрог

2020

**Лист согласования**

Учебно-методическое пособие по учебные дисциплины ***Элементы высшей математики*** разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) для специальности среднего профессионального образования (далее – СПО) 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

**Разработчик(и):**

Преподаватель Т.М. Марданова

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании цикловой методической комиссии специальности 09.02.05Прикладная информатика (по отраслям)

Протокол № 7 от «04» февраля 2020г

Председатель цикловой методической комиссии О.В. Андриян

**Рецензенты:**

ЧОУ ВО «ТИУиЭ» начальник информационно-аналитического управления, к.т.н., доцент О.И. Овчаренко

АО «Красный гидропресс»зам. начальника отдела ИТ С.С. Пирожков

**Согласовано:**

Заведующий УМО

Т. В. Воловская

**Введение**

В учебно-методическом пособии к практикуму по курсу «Операционные системы и среды» изложены сведения, необходимые для успешного выполнения практических занятий по данному курсу. Описан процесс работы с инструментарием, применяемым на практических занятиях, представлен ряд типичных задач и подходы к их решению. Практические занятия посвящены возможности усвоить основные понятия линейной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории комплексных чисел.

Изучение данного курса будет способствовать приобретению навыков решения задач высшей математики.

Цель настоящего пособия – помочь обучающимся при выполнении практических работ, выполняемых для закрепления знаний по теоретическим основам и получения практических навыков.

**Обучающийся должен уметь:**

* выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений;
* применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
* решать дифференциальные уравнения.

**Обучающийся должен знать:**

* основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии;

Данное учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 2 курса.

**Правила выполнения практических занятий**

Практические занятия выполняются каждым обучающимся самостоятельно в полном объеме и согласно содержанию методических указаний.

Перед выполнением обучающийся должен отчитаться перед преподавателем за выполнение предыдущего занятия (сдать отчет).

Обучающийся должен на уровне понимания и воспроизведения предварительно усвоить необходимую для выполнения практических занятий теоретическую и информацию.

Обучающийся, получивший положительную оценку и сдавший отчет по предыдущему практическому занятию, допускается к выполнению следующему занятию.

Обучающийся, пропустивший практическое занятие по уважительной либо неуважительной причине, закрывает задолженность в процессе выполнения последующих практических занятий.

**Раздел 1. Элементы линейной алгебры**

**Тема 1.1 Матрицы и определители**

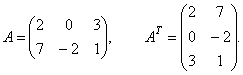
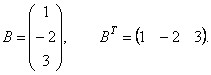
**Практическое занятие № 1. Действия над матрицами.**

**Цели занятия:** Научиться выполнять действия над матрицами.

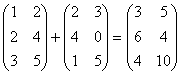
**Ход занятия**

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над матрицами**

**Пример.** Найти матрицу транспонированную данной.

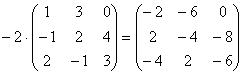
1. 
2. 

**Примеры.** Найти сумму матриц:

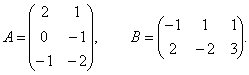
1. .
2. l12image040- нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. l12image042.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному *A+B=B+A* и ассоциативному (*A+B*)+*C*=*A*+(*B+C*).

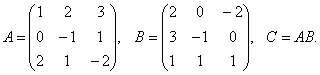
**Примеры.**

1. .
2. Найти 2A-B, если l12image056, l12image058.

l12image060.

1. Найти *C*=–3*A*+4*B*.

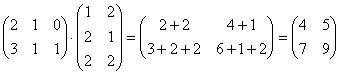
Матрицу *C* найти нельзя, т.к. матрицы *A* и *B* имеют разные размеры.

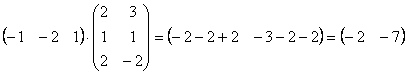
1. Пусть 

Найти элементы *c12*, *c23* и *c21* матрицы *C*.

l12image070

1. Найти произведение матриц.

.

1. .
2. l12image076- нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.
3. Пусть l12image078

Найти *АВ* и *ВА*.

l12image080

1. l12image082

Найти *АВ* и *ВА*.

l12image084, *B·A* – не имеет смысла.

1. **Выполнить следующие упражнения**
2. Вычислить матрицу hello_html_2db3aca2.gif, где

hello_html_m78a349c.gif, hello_html_7f3dedc7.gif

1. Даны матрицы hello_html_6876e572.gifи hello_html_m33296b4.gif. Найти hello_html_m320aa2ee.gifесли

hello_html_m1f67797c.gif, hello_html_m27bab9d8.gifhello_html_5bda2ec4.gif.

1. Даны матрицы hello_html_6876e572.gifи hello_html_m33296b4.gif. Найти hello_html_m1a42e4af.gifесли

hello_html_64371195.gif, hello_html_17f176c8.gif.

1. Даны матрицы hello_html_6876e572.gifи hello_html_m33296b4.gif. Найти hello_html_54ff3b41.gifесли

hello_html_472f64a.gif, hello_html_m624c4e4f.gif.

1. Даны матрицы hello_html_6876e572.gifи hello_html_m33296b4.gif. Найти hello_html_2b3eb44e.gifесли

hello_html_4f19df38.gif, hello_html_m29afa992.gif.

1. Найти матрицу hello_html_7e073977.gifгде hello_html_29b5829f.gifнекоторое число, hello_html_m1c049cba.gifединичная матрица, hello_html_m6a7b199.gifзаданная матрица.

hello_html_1902453.gif

1. Вычислить hello_html_m2d8d7dd3.gifпри hello_html_436b9784.gif
2. Даны матрицы hello_html_6876e572.gifи hello_html_m33296b4.gif. Найти матрицу hello_html_m4bec477e.gif, если возможно.

hello_html_m31988878.gif, hello_html_m594f7874.gif

**Практическое занятие № 2. Вычисление определителей. Нахождение обратной матрицы.**

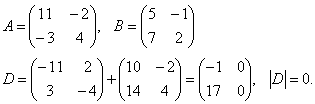
**Цели занятия:** Научиться вычислять определители, используя определение и теорему о разложении. Научиться находить обратную матрицу.

**Ход занятия:**

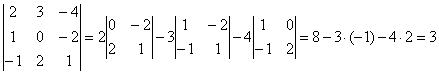
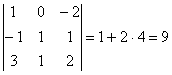
1. **Ознакомиться с примерами вычисления определителей и нахождения обратной матрицы**

**Примеры.** Вычислить определители второго порядка.

1. l12image093
2. l12image095.
3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D= -А+2В* и



**Примеры.** Вычислить определитель третьего порядка.

1. .
2. 
3. **Пример.** Дан определитель . Найти *A13, A21, A32*.

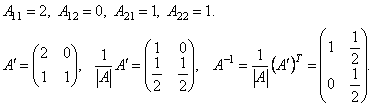
l13image030

1. Вычислить определитель , раскладывая его по элементам 2-го столбца.

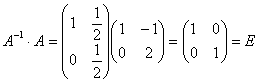


1. Найти матрицу, обратную данной l13image075. Сделать проверку.

|*A*| = 2. Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы *A*.

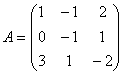


Проверка:

.

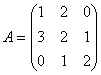
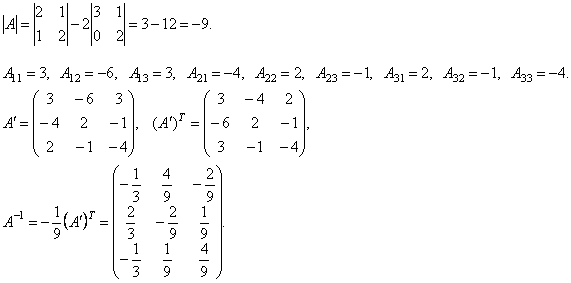
Аналогично *A∙A-1 = E*.

1. Найти элементы l13image081и l13image083матрицы *A-1* обратной данной

.

Вычислим |*A*| = 4. Тогда l13image087.

l13image089.

1. . Найдем обратную матрицу. 
2. **Выполнить следующие упражнения**

Вычислить определитель матрицы.

hello_html_7d940a0b.gif

hello_html_m467a9a7c.gif

hello_html_m2019ab0b.gif

Найти матрицу обратную матрице А.

hello_html_m52f48fbf.gif

**Тема 1.2 Системы линейных алгебраических уравнений**

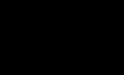
**Практическое занятие № 3. Решение систем линейных уравнений с использованием правила Крамера.**

**Цели занятия:** Научиться решать системы линейных уравнений с помощью правила Крамера.

**Ход занятия:**

**1.Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью правила Крамера.**

Пример. Найти решение системы уравнений:



Вычислим главный определитель системы

D = = 5(4 – 9) + (2 – 12) – (3 – 8) = -25 – 10 + 5 = -30;

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой первого столбца на столбец свободных членов

D1 = = (28 – 48) – (42 – 32) = -20 – 10 = -30.

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой второго столбца на столбец свободных членов

D2 = = 5(28 – 48) – (16 – 56) = -100 + 40 = -60.

Вычислим второстепенный определитель системы, полученный из главного заменой третьего столбца на столбец свободных членов

D3 = = 5( 32 – 42) + (16 – 56) = -50 – 40 = -90.

Найдем неизвестные, используя формулы Крамера

x1 = D1/D = 1;

x2 = D2/D = 2;

x3 = D3/D = 3.

**2. Выполнить следующие упражнения**

Решить системы уравнений спомощью правила Крамера

1. hello_html_38c96ae7.gif
2. hello_html_m5a003ed8.gif
3. hello_html_m37c14388.gif
4. hello_html_7ba48980.gif

**Практическое занятие № 4 Решение систем линейных уравнений с использованием метода Гаусса**

**Цели занятия:** Научиться решать системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами решения систем линейных уравнений с помощью метода Гаусса**

Пример. **.** Методом Гаусса (или методом исключения неизвестных) найти решение системы линейных алгебраических уравнений

hello_html_m7b66b6c.gif.

Решение. Выпишем расширенную матрицу hello_html_1e48fce1.gifданной системы и приведем ее к ступенчатому виду

hello_html_1b1e9764.gif.

Последовательно умножим первую строку на (–2) и прибавим ее ко второй строке, затем умножим на (–3) и прибавим к третьей строке, умножим на (–2) и прибавим к четвертой строке, получим

hello_html_m6be1aa1d.gif.

Ко второй строке полученной матрицы прибавим третью строку, умноженную на hello_html_m4825183f.gif, затем во вновь полученной матрице умножим третью строку на hello_html_m2693891b.gif, четвертую – на (–1), затем последовательно умножим вторую строку на 2 и прибавим ее к третьей строке, умножим на 7 и прибавим к четвертой строке, получим

hello_html_m7aea7ee8.gif.

Третью строку полученной матрицы умножим на hello_html_m460d0f69.gif, четвертую – на hello_html_60c7ac34.gif, затем третью строку умножим на (–1) и прибавим к четвертой строке, получим

hello_html_m62535dc5.gif.

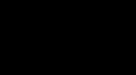
Найденная матрица имеет треугольный вид; по этой матрице запишем систему уравнений, эквивалентную исходной системе,

hello_html_519c597e.gif.

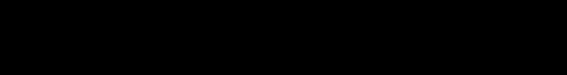
Последовательно находим неизвестные, начиная с последнего уравнения, hello_html_m16dfb466.gif; подставим в третье уравнение найденное hello_html_m6d3ba21f.gif, вычислим hello_html_5297e13a.gif, hello_html_613c341a.gif; затем из второго уравнения находим hello_html_m74427b7d.gif, hello_html_452bc14e.gif; из первого уравнения получим hello_html_5b9ea016.gif, hello_html_m4bcba896.gif.

Ответ : hello_html_m70358186.gif.

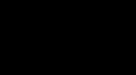
Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.



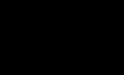
Составим расширенную матрицу системы.

А\* = 

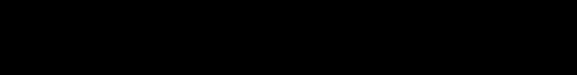
Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

, откуда получаем: x3 = 2; x2 = 5; x1 = 1.

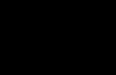
Пример. Решить систему методом Гаусса.



Составим расширенную матрицу системы.



Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

, откуда получаем: z = 3; y = 2; x = 1.

**2. Выполнить следующие упражнения**

Решить системы уравнений с помощью метода Гаусса

1. hello_html_38c96ae7.gif
2. hello_html_m5a003ed8.gif
3. hello_html_m37c14388.gif
4. hello_html_7ba48980.gif

**Практическое занятие № 5. Контрольная работа № 1. Матричные операции. Решение систем линейных уравнений**

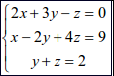
**Цели занятия:** Проверить умение выполнять матричные действия и умение решать системы линейных алгебраических уравнений

**Вариант № 1**

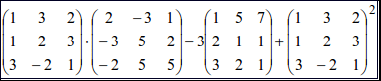
**Задача 1.** Вычислить определитель:



**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.



**Задача 3.** Выполнить действия:

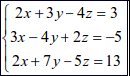


**Вариант № 2**

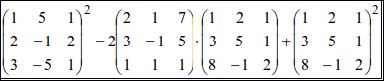
**Задача 1.** Вычислить определитель:



**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.



**Задача 3.** Выполнить действия:

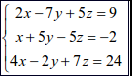


**Вариант № 3**

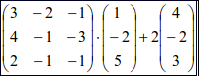
**Задача 1.** Вычислить определитель:



**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.



**Задача 3.** Выполнить действия:

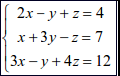


**Вариант № 4**

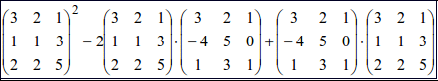
**Задача 1.** Вычислить определитель:



**Задача 2.** Решить систему методом Гаусса, матричным способом и используя правило Крамера.



**Задача 3.** Выполнить действия:



**Тест по разделу «Элементы линейной алгебры»**

1. Матрицей второго порядка называется:
   1. выражение с двумя элементами;
   2. таблица из четырех элементов;
   3. четыре числа;
2. В квадратной матрице…
   1. все элементы одинаковы;
   2. четное число элементов;
   3. число строк равно числу столбцов;
3. Главная диагональ в матрице:
   1. слева сверху – вправо вниз;
   2. слева снизу – вправо вверх;
   3. не должна содержать нулей;
4. Нулевая матрица, это такая матрица, в которой..
   1. все элементы нулевые;
   2. на главной диагонали – нули;
   3. есть строка (столбец) из нулей;
5. Элемент с одинаковыми индексами это-
   1. элемент главной диагонали;
   2. нечетный элемент матрицы;
   3. нулевой элемент матрицы;
6. Результатом сложения двух матриц есть
   1. матрица того же порядка и размера;
   2. матрица большего размера
   3. диагональная матрица;
7. Определитель равен
   1. -1
   2. 1
   3. 13
8. Какую матрицу можно возвести в квадрат?
   1. Прямоугольную;
   2. квадратную;
   3. абсолютно любую;
9. Какой метод используется при решении системы линейных уравнений с числом переменных не равных числу уравнений
   1. Формулы Крамера
   2. Метод Гаусса
   3. Метод обратной матрицы
10. Определитель hello_html_m7f8c96ef.gifравен
    1. 1
    2. 0
    3. 2

**Раздел 2. Элементы аналитической геометрии**

**Тема 2.1. Векторы. Операции над векторами.**

**Практическое занятие № 6. Выполнение действий над векторами**

**Цели занятия:** Научиться выполнять действия над векторами

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами выполнения действий над векторами**
2. ***ВЕКТОРЫ И КООРДИНАТЫ.***
3. 1.Векторный ***базис*** на плоскости .
4. ***Разложение*** вектора по базису .
5. ***Координаты*** вектора .
6. 2.Векторный ***базис*** в пространстве .
7. ***Разложение*** вектора по базису .
8. ***Координаты*** вектора .
9. 3.Для нахождения ***координат*** вектора надо из координат его конца вычесть одноименные координаты начала вектора.
10. 4.***Длина вектора*** равна корню квадратному из суммы квадратов его координат.
11. 5.***Скалярным произведением*** векторов ***называется*** произведение длин векторов на косинус угла между ними.
12. 
13. 6.***Скалярное произведение*** векторов ***равно*** сумме произведений одноименных координат вектора.
14. 7.Если векторы заданы своими координатами ,то ***действия*** над ними выполняются по правилам:
15. .
16. 8.***Деление отрезка пополам.*** Точки А(х1;у1) и В(х2;у2) являются началом и концом отрезка; М(х.;у) делит отрезок АВ пополам. Координаты точки М находят по формулам
17. .
18. 9.***Деление отрезка в данном отношении.*** Если отрезок АВ делится точкой М в отношении m:n=, то координаты точки М находят по формулам
19. .
21. **Выполнить следующие упражнения**
22. Вычислить модуль вектора ***а*** *—* {6; 3; — 2}.
23. Даны две координаты вектора *Х=4, У=* —12. Определить его третью координату *Z* при условии, что hello_html_4c7ad5b3.gif.
24. Даны точки *А*(3; —1; 2)и *В*(— 1; 2; 1).Найти координаты векторов hello_html_30b07f89.gifи hello_html_m7206f7f0.gif*.*
25. Определить точку *N, с* которой совпадает конец вектора ***а***= {3; —1; 4}, если его начало совпадает с точкой *М (I; 2; —*3).
26. Определить начало вектора *а* = {2; —3; —1}, если его конец совпадает с точкой (1; —1; 2).
27. Дан модуль вектора hello_html_766131b9.gifи углы hello_html_295fc59d.gif= 45°, hello_html_3b2799fd.gif= 60°, hello_html_55242ace.gif=120°. Вычислить проекции вектора *а* на координатные оси.
28. Вычислить направляющие косинусы вектора ***а***={12; —15; —16}.
29. Вычислить направляющие косинусы вектора
30. hello_html_m59b6e8ae.gif
31. **.** Может ли вектор составлять с координатными осями следующие углы: 1) hello_html_295fc59d.gif= 45°, hello_html_3b2799fd.gif= 60°, hello_html_55242ace.gif= 120°; 2) hello_html_295fc59d.gif= 45°, hello_html_3b2799fd.gif=135°, hello_html_55242ace.gif= 60°; 3) hello_html_295fc59d.gif= 90°, hello_html_3b2799fd.gif=150°; hello_html_55242ace.gif= 60°?
32. Может ли вектор составлять с двумя координатными осями следующие углы: 1) hello_html_295fc59d.gif= 30°, hello_html_3b2799fd.gif= 45°; 2) hello_html_3b2799fd.gif= 60°, hello_html_55242ace.gif= 60°; 3) hello_html_295fc59d.gif= 150°, hello_html_55242ace.gif= 30°?
33. Вектор составляет с осями *Ох* и *Oz* углы hello_html_295fc59d.gif=120° и hello_html_55242ace.gif= 45°. Какой угол он составляет с осью *Оу?*
34. Вектор *а* составляет с координатными осями *Ох* и *Оу* углы hello_html_295fc59d.gif= 60°, hello_html_3b2799fd.gif= 120°. Вычислить его координаты при условии, что hello_html_766131b9.gif.
35. Определить координаты точки *М,* если её радиус—вектор составляет с координатными осями одинаковые углы и его модуль равен 3.
36. По данным векторам ***а***и ***b***построить каждый из следующих векторов: 1) ***а*** *+* ***b****;* 2) ***а*** *—* ***b****;* 3) ***b*** *—* ***а****;* 4) —***а***— ***b****.*
37. Даны: |***а***| = 13, |***b***| = 19 и |***а*** + ***b***| = 24. Вычислить |***а*** *—* ***b***|.
38. Даны: |***а***| = 11, |***b***| = 23 и |***а*** + ***b***| = 30. Определить |***а*** + ***b***|.

**Тема 2.2. Прямые на плоскости. Кривые второго порядка**

**Практическое занятие № 7 Составление уравнений прямых, их построение**

**Цели занятия:** Научиться составлять уравнения прямой любого вида

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений прямых любого вида**
2. В прямоугольной системе заданы две точки А (х1 ; у1 ) и В (х2 ; у2 ).

|  |  |
| --- | --- |
| AM=CД=х1 - у2  ВМ=EF= у2 - х1 | 1рис |

1. Длина вектора { х2 - х1 ; у2 - у1}равно корню квадратному из суммы квадратов его координат.
2. **Деление отрезка в данном отношении.**
3. Дан отрезок АВ с координатами А(х1 ; у1 ) и В (х2 ; у2 ) и на нем дана точка С с координатами (х;у), которая делит отрезок АВ так, что АС:СВ=. Определить координаты третей точки С Q и следовательно, имеют место пропорции.

|  |  |
| --- | --- |
| (1)  и  (1)  Определите отрезки АК, СQ, CK, BQ и внесите их значения в полученные пропорции (1) и (2), имеем:  и | 2рис |
| и решив уравнение, получите значения х и у:    Если точка С делит отрезок АВ пополам, то АС=СВ, а  и  . | |

1. **Уравнение прямой на плоскости.**
2. Всякое уравнение вида Ах + Ву + С= 0, где {A,B,C}ϵR и А2 + В2 ≠О,

|  |  |
| --- | --- |
| называется общим уравнением прямой на плоскости, оно задает единственную прямую на плоскости.  Всякий вектор, перпендикулярный прямой, называется ее нормальным вектором . Угол между прямы ми удобно находить как угол между их нормальными векторами. |  |

1. **Уравнение,прямой с угловым коэффициентом.**

|  |  |
| --- | --- |
| Дана прямая АВ, которая с осью Ох образует угол (р и на оси Оу отсекает | |
| отрезок ON = b. Эти величины  определяют положенью прямой  АВ на плоскости в заданной  системе координат и являются  ее параметрами, так как они  постоянны только для данной  прямой АВ.  На прямой АВ дана  произвольная точка С (х, у). Из  прямоугольного треугольника NCK имеем: |  |
| , а ,NK=OM=x. Пологая , получаем , -мы получим уравнение прямой с угловым коэффициентом относительно текущих координат x и y. | |

1. **Частныеслучаи уравнения прямой с угловым коэффициентом**.
2. Прямая АВ проходит через начало координат, Ь=0 и уравнение  (сделать чертеж). Прямая АВ параллельна оси Ох, т.е. угол и и уравнение принимает вид: у = b (сделать чертеж). Если прямая у = b совпадает с осью Ох , то b = 0 и уравнение оси Ох имеет вид у = 0.
3. Прямая АВ параллельна оси Оу. Абсцисса точки пересечения ее с осью Ох равна "а". Уравнение такой прямой х = а (сделать чертеж). Если прямая
4. х = а совпадает с осью Оу, а = 0 и уравнение оси Оу х=0.
5. Таким образом, всякая прямая выражается уравнение первой степени относительно текущих координат. Чтобы составить уравнение прямой, нужно определить ее параметры k и b.
6. **Уравнение прямой в отрезках.**

|  |  |
| --- | --- |
| В прямоугольной системе координат задана прямая АВ, которая на осях | |
| координат отсекает отрезки ОВ = а и ОА = b. На прямой АВ дана точка С с текущими координатами (х;у) т.к. - общий.  Из подобия треугольников следует, что , ;  и .  Подставив значения, получим: . |  |
| Поделив в прямой части почленно на «а» и перенося в левую часть равенства, получите искомое уравнение прямой в отрезках.  , | |

1. **Точка пересечения прямых.**

|  |  |
| --- | --- |
| В системе координат даны прямые (AB) и | |
| (CD), которые пересекаются в точке N. Точка N лежит на прямой AB и CD и, следовательно, координаты этой точки удовлетворяют уравнениям этих прямых , а следовательно, являются корнями системы: |  |

1. **Вывод уравнений прямой, проходящей через две точки.**

|  |  |
| --- | --- |
| В системе координат даны две точки *А (х;у)* и *В(х;у).* Уравнение | |
| прямой относительно точки *A (x1;y1)* имеет вид:  (1).  Подставляя координаты второй точки *в* (х2;у2), получим (2)  Необходимо из равенства (2) найти "к", подставить в равенство (1), разделить |  |
| обе части на у*2 –*у*1,* и получить уравнение прямой, проходящей через эти точки. | |

1. Можно рассмотреть следующим способом.
2. **Уравнение прямой проходящей через две данные точки.**

|  |  |
| --- | --- |
| Даны точки A (x;y1) и B(x2;y2). Составим уравнение AB. Возьмем | |
| на прямой AB текущую точку (x;y). Рассмотрим векторы  и . |  |
| Эти векторы коллинеарные, т.е. k=€R.  Следовательно, их координаты пропорциональны: . Полученное уравнение есть уравнение прямой проходящей через точку  A и B. | |

1. **Угол между прямыми**

|  |  |
| --- | --- |
| В прямоугольной системе координат заданы две прямые  (АВ)  (СD), которые пересекаются в точке N | |
| под углом , а . Определить угол , зная угловые коэффициенты данных прямых AB и CD. За угол, образуемый с прямой AB прямой CD, применяется тот угол, на который надо повернуть прямую AB около точки N против часовой стрелки, чтобы она совпала с прямой CD. Угол как внешний угол, а отсюда . Если углы равны, то равны и их тангенсы: |  |
| а | |

1. **Условия параллельности и перпендикулярности прямых.**

|  |  |
| --- | --- |
| В прямоугольной системе координат даны прямыеAB║CD. Следовательно, и , и  - угловые коэффициенты равны. |  |

|  |  |
| --- | --- |
| В прямоугольной системе координат даны прямые AB ┴ CD. Так | |
| Как прямая AB перпендикулярна CD, то угол , , а следовательно, , следовательно , а  Угловые коэффициенты обратны величине и противоположны по знаку. |  |

1. **Примеры решения задач.**
2. **Задача №1.**

|  |  |
| --- | --- |
| Даны точки А (-4;3), В (0; -1), С (2;6). Составить уравнение прямой, проходящей через точку С, перпендикулярно АВ. | |
|  | CM**┴**AB  Составим уравнение AB:      x+4=-y+3 |
| y=-x-1 – уравнение  Составим уравнение CM в виде с угловым коэффициентом ; получим Т.к. , то ее координаты удовлетворяют уравнению СМ. Подставим координаты С в уравнение СМ и найдем b:  Тогда y=x+4 – уравнение CM.  **Ответ: y=x+4** | |

1. **Задача №2**

|  |  |
| --- | --- |
| Дан А(6;0), В(-2;-4), С(1;3). Найти угол А и уравнение прямой, проходящей через точку D(4;-4), параллельно стороне ВС. | |
|  | 1) Найдем с помощью скалярного произведения векторов.  . |
| 2) Составим уравнение DM, используя условие параллельности прямых DM║BC.  Составим уравнение ВС:    Тогда  Составим ВМ в виде  Найдем «b» из условия , подставив координаты D в уравнение;   Подставим уравнение ВМ получим:  Ответ:  **Задача №3**   |  |  | | --- | --- | | Даны уравнения сторон треугольника:  4х-3y-9=0; 3x+4y+12=0; x-2y+4=0. Найти его вершины, сделать чертеж, вычислить площадь треугольника.  Найдем вершину А:    -25y-75=0  Y=-3    Найдем вершину В:    5х+20=0  х=-4 | | |  | Для нахождения SABC можно воспользоваться формулой Герона: | | |

1. **Выполнить следующие упражнения**
2. Составить уравнение прямой и построить прямую на чертеже, зная её угловой коэффициент *k* и отрезок *b,* отсекаемый ею на оси *Оу:*

1) *k* = 4 , *b* = 3; 2) *k = 3, b = 0;* 3) *k = Q,, b = — 2;*

1. *k = —* hello_html_488184a9.gif, *b = 3;* 5) *k* = —2, *b* = — 5; 6) *k* = —hello_html_67f1188.gif, *b* = hello_html_m72deb6c0.gif.
2. Определить угловой коэффициент *k* и отрезок *b,* отсекаемый на оси *Оу,* для каждой из прямых:

1) *5х—у + 3 = 0;* 2) *2х*+3*у — 6 = 0;*

3) *5х +* 3*у*+2 *= 0;* 4) 3*x*+2*y*; = 0; 5) *y* — 3 = 0.

1. Дана прямая 5*х*+3*у* — 3 = 0. Определить угловой коэффициент *k* прямой:
   1. параллельной данной прямой;
   2. перпендикулярной к данной прямой.
2. Дана прямая 2х+3*у*+4 = 0. Составить уравнение прямой, проходящей через точку *M*0(2; 1):
   1. параллельно данной прямой;
   2. перпендикулярно к данной прямой.
3. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

2*х*—3*у*+5 = 0, 3*х*+2*у* — 7 = О

и одна из его вершин *A*(2; —3). Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

1. Даны уравнения двух сторон прямоугольника

*х — 2у = 0, х —* 2*y*+15 = 0 и уравнение одной из его диагоналей

7*x*+*y—*15 *= 0.* Найти вершины прямоугольника

**Практическое занятие № 8 Составление уравнений кривых 2-го порядка, их построение**

**Цели занятия:** Научиться составлять уравнения кривых второго порядка и строить графики

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами составления уравнений кривых второго порядка и построения их графиков**

**1.Общее уравнение кривой II порядка**

Всякое уравнение вида Ах2 + By2 + Сху + Dx + Еу + F = 0 задает единственную кривую II порядка при А2 + В2 ≠ 0; {А, В, С, D, Е, F} ϵ R.

К кривым II порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола, парабола. Их канонические уравнения выводятся из определений.

**2.Окружность**

|  |  |
| --- | --- |
| Окружностью называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой центром, на расстояние, называемое радиусом. | |
| C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\FineReader11.00\media\image1.jpeg | Пусть **А (а, Ь)** - центр окружности;  **М (х, у)** - текущая точка на окружности;  **| AM |** = R - радиус.  **|AM |** =  **(х - а)2 + (у - b)2 = R2** - уравнение окружности |
| Раскрыв скобки и приведя подобные, получим общее уравнение кривой II порядка, в котором **А = В, С = 0**. | |

|  |  |
| --- | --- |
| **3. Эллипс**  Эллипсом называется геометрическое место точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (2а), большая, чем расстояние между фокусами (2с).  Расположим фокусы на Ox, Оу ┴ F1, F2, **|** OF1 **|** =  **|** OF2 **|**.  M (x, у) - текущая точка эллипса; A1,2 (± a, 0), В (0, ± b) - вершины;  F, (-c, 0), F2 (c, 0) - фокусы; 2c - расстояние между фокусами;  2a - сумма расстояний от точки до фокусов; 2а > 2с (по определению). | |
| **| MF1| + | MF2 | = 2а** (по определению)          a2(x2 +2сх + с2 + у2) = а4 + 2а2сх + с2х2  а2х2 + 2а2сх + а2с2 + а2у2 = а4 + 2а2сх + с2х2  (а2 - с2) х2 + а2у2 = а2(а2 - с2). | C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\FineReader11.00\media\image1.jpeg |
| По определению а2 – с2 >0; пусть а2 – с2 = b2   b2x2+a2y2=a2b2  - каноническое уравнение эллипса с центром в точке **О(0;0).**  Если центр эллипса лежит в точке **А(x1; y1),** то уравнение эллипса имеет вид:  Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси (большая ось - на которой лежат **F1,2** ).  , где | |

|  |
| --- |
| **4. Гипербола**  Гиперболой называется геометрическое место точек, абсолютная величина разности расстояний которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная **(2а),** меньшая, чем расстояние между фокусами **(2с). (2а < 2с).**  Пусть **F1 (-с;** 0), **F2 (с;** 0) - фокусы, лежащие на оси **Ох;**  **М (х; у)** - текущая точка гиперболы.  **По определению || MF1| -|MF2 ||= 2а, 2а < 2с.**  При этом вершины гиперболы лежат в точках **A1,2 (± а; 0),** и **В1**,**2** **(0; ±b).**  Аналогично выводу канонического уравнения эллипса, по определению, выводим уравнение гиперболы и получим: |
| ; b2=c2-a2;  - эксцентриситет гиперболы.  C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\FineReader11.00\media\image2.jpeg |
| Прямые, заданные уравнениями , называются асимптотами гиперболы. Ось на которой лежат фокусы, называется действительной, другая ось - мнимая. Если **F1,2** ϵ **Оу**, то уравнение гиперболы имеет вид:  ;  a2=b2-c2).  При **а = b** гипербола называется равносторонней.  Если центр гиперболы смещен в точку M1 (x1; y1), то ее уравнение имеет вид:  ( или ).  **5. Парабола**  Параболой называется геометрическое место точек, равноудаленных от точки, называемой фокусом, и прямой, называемой директрисой параболы.   |  |  |  | | --- | --- | --- | | ; M(x,y); ;  Каноническое уравнение параболы получим, если за одну из координатных осей берется ось параболы, а другая ось - прямая, перпендикулярная первой оси и проведенная через середину отрезка между фокусом и директрисой. Тогда уравнение параболы будет иметь вид: | | | | 1. y2=2px |  | - директриса;  P=KF-параметр | | 1. y2=-2px |  |  | | 1. y2=2py | C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\FineReader11.00\media\image1.jpeg |  | | 1. y2=-2py |  |  | |

Если вершина параболы смещена в точку M1 (х1; у1), то ее уравнение имеет вид:

(y-y1)2=±2p(x-x1) или (x-x1)2=±2p(y-y1).

Преобразование общего уравнения кривой II порядка к каноническомувиду.

Уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы являютяся частными случаями уравнений кривой II порядка вида **Ах2 + Вху + Су2 + Dx + Еу + F =0** (член Вху отсутствует, т.к. рассматривается параллельный перенос осей координат в точку (х-ь yi), а не поворот осей).

Выяснение вида уравнения производится методом выделения полных квадратов.

**Пример.**

Выяснить, какую линию определяет данное уравнение и построить ее.

**4х2 + 9у2 + 16х-18у-11 = 0**

**4(х2 + 4х) + 9(у2 - 2у) = 11**

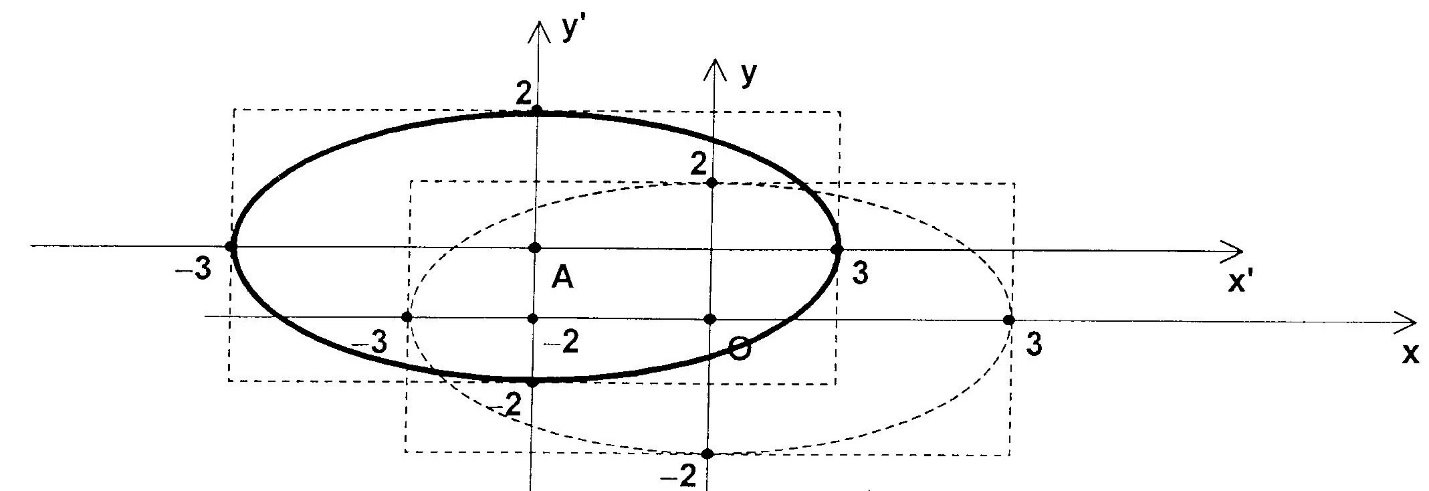
**4[(х2 + 2ˑ2ˑх + 4) - 4] + 9[(у2 - 2ˑ1ˑу + 1) -1] = 11**

**4(х + 2)2 - 16 + 9(у - 1)2 - 9 = 11**

**4(х + 2)2 + 9(у - 1 )2 = 11 +25**

**4(х + 2)2 + 9(у - 1)2 = 36. | : 36**

**** Тогда центр А(-2; 1); а = 3; b = 2.



**Раздел: Кривые второго порядка**

**Примеры решения задач**

**№ 1.** Окружность проходит через три точки: М (-1; 5), N (-2; -2), D (5; 5). Составить ее уравнение.

В задаче необходимо подставить координаты точек в уравнение

(x-a)2+(y-b2)=R2 и получается система вида :



Так как в системе правые части равны, то можно составить равенства вида:

(-1 - а)2 + (5 - b)2 = (-2 - а)2 + (-2 - b)2 **(1)**  
(-1 - а)2 + (5 - b)2= (5 - а)2 + (5 - b)2 **(2)**

После раскрытия скобок и приведения подобных членов получится система:



Решив систему, получаем координаты центра, а потом определяем R из одного из уравнений.

Ответы: а=2; b=1; R=5, а уравнение x2+y2-4x-2y-20=0

**№ 2.** Дано уравнение эллипса **25х2 + 169у2 = 4225.** Определить **2а, 2b,**

**с, е** и построить эллипс. Для решения этой задачи привести уравнение

эллипса **25х2** + **169у2** = **4225** к виду и определить **a** и **b,**

а потом **2а** и **2b**. Найдя **a** и **b** , определить с и е и построить эллипс.

|  |  |
| --- | --- |
| Нужно поделить все члены на **4225** и получить уравнение.    отсюда: | C:\Users\Admin\AppData\Local\Temp\FineReader11.00\media\image2.jpeg |
| **a2=169 b2=25**  **a=±13 b=±5**  **2a=26 2b=10**  **c2=a2-b2=169-25=144, a c=±12 и F(±12; 0)**  ≈ **0,9**  **№ 3.** В эллипс вписана окружность **х2 + у2 = 16**, проходящая через его фокусы. Составить уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси **Оу**. Сделать построение. Из него видно, что **R = C = 4** и **а = 4**, **а b** нужно найти. Ответ: **2х2 + у2 = 32**.  **№ 4.** Гипербола проходит через точки: **А (-5; 2)** и **В ( ; ).** Составить ее уравнение, если фокусы ее лежат на оси **Ох.**  **№ 5.** Асимптоты гиперболы заданы уравнениями и гипербола проходит через точку **А (6; 9)**. Составить ее уравнение. | |

**№ 6.** Две вершины эллипса лежат в фокусах гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса. Написать уравнение гиперболы, если уравнение эллипса есть



**Решение № 4** Для решения четвертой задачи необходимо получить систему вида:



решение которой дает значения **а** и **b**. Ответ: **2х2 - 5у2 = 30.**

**Решение № 5** Для решения пятой задачи получаем систему:



Ответ: **25x2 -9y2=171**

**Решение № 6** Для решения шестой задачи необходимо составить чертеж, соответствующий условию задачи. Из чертежа видно, что а2 = сэ и с2 = аэ. Исходя из этого, найти сэ, аэ, Ьэ а потом определить а2 и b2, и записать уравнение.

**Ответ: 9х2 - 7у2 = 63.**

**№ 7**

**F (5; 0).** Составить уравнение параболы и уравнение директрисы.

**F (0; 4).** Составить уравнение параболы и уравнение директрисы.

**№ 8** Парабола симметрична оси **Ох** и проходит через точку **М (1; —4).** Составить ее уравнение.

**№ 9** Парабола симметрична оси **Оу** и проходит через точку **N (6; -2).** Составить ее уравнение.

**Решение № 7** В седьмой задаче , а **р = 10**

Ответы: **у2 = 20х** и уравнение директрисы **х = -5.**

**Решение № 8** В восьмой задаче координаты точки **М (1; -4)** подставляем в уравнение **у2 = 2рх** и находим **р.**

**Ответ: у2 = 16х.**

**Решение № 9** В девятой задаче поступить аналогично.

Ответ: **х2 = -18у.**

**№10** Составить уравнение эллипса, определить координаты фокусов и эксцентриситет, если оси его равны **8** и **4.**

**№11** Расстояние между фокусами **2с = 6** и большая ось **=10.** Составить уравнение эллипса, если его фокусы лежат на оси **Ох**.

**Решение №10** Дано, что **2а = 8** и **2b = 4.** Найти **а** и **Ь,** и подставить в уравнение

 Ответ: **4у2 + х2 = 16.**

Из формул **с2** = **а2** - **b2** и найти **с** и **е.**

Ответ: F(±;0) **и** е **≈** 0,9.

***Решение* № 11** Дано ***2с*** = ***6*** и ***2а* = 10**. Найти ***с*** и ***а,*** а потом из ***с2 = а2*** - ***b***2найти ***b*** и составить уравнение.

Ответ: **16x2+25y2=400**

Пример. Найти координаты центра и радиус окружности, если ее уравнение задано в виде:

2x2 + 2y2 – 8x + 5y – 4 = 0.

Для нахождения координат центра и радиуса окружности данное уравнение необходимо привести к виду, указанному выше в п.9. Для этого выделим полные квадраты:

x2 + y2 – 4x + 2,5y – 2 = 0

x2 – 4x + 4 –4 + y2 + 2,5y + 25/16 – 25/16 – 2 = 0

(x – 2)2 + (y + 5/4)2 – 25/16 – 6 = 0

(x – 2)2 + (y + 5/4)2 = 121/16

Отсюда находим О(2; -5/4); R = 11/4.

**Практическое занятие № 9 Приведение уравнений кривых второго порядка к каноническому виду**

**Цели занятия:** Научиться приводить уравнения кривых второго порядка к каноническому виду

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами приведения уравнений кривых второго порядка к каноническому виду**

Пример.Пусть дано уравнение

*Ax2 + Су2 +2Dx + 2Еу + F = 0,*

определяющее кривую второго порядка.

Рассмотрим произведение А\*С:

1. Если А\*С> 0, то кривая определяет эллипс, может быть окружность;
2. Если А\*С< 0, то кривая определяет гиперболу;
3. Если А\*С= 0, то кривая определяет параболу.

Приводим данное уравнение к каноническому виду путем выделения полного квадрата.

Исследуйте уравнение *4х2+9у2-8х -36у+4=0* и определите вид полученной кривой

Сначала определяем тип кривой, находим произведение А\*С

А\*С=4\*9=36>0, следовательно, искомая кривая – эллипс.

Выделяем полный квадрат:

*4х2+9у2-8х -36у+4=0*

*4х2-8х+9у2-36у+4=0*

*(2х)2-2\*2х\*2 +4-4+(3у)2-2\*3у\*6+36-36+4=0*

*(2х-2)2+(3у-6)2-36=0*

*4(х-1)2+9(у-2)2=36*

Разделим обе части на *36:*

*(х-1)^2/9+(у-2)^2/4=1*

Получилось каноническое уравнение эллипса.

1. **Выполнить следующие упражнения**

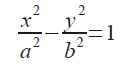
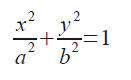
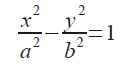
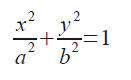
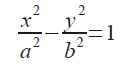
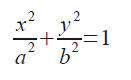
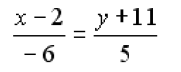
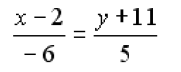
Определить тип кривой второго порядка и построить ее график.

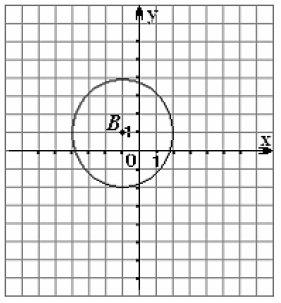
1. *4х2-у2-4=0*
2. *х2+у2+6х+2у+1=0*
3. *4х2+36у2-16х+72у-92=0*
4. *25х2-100=4у2*
5. *х2+у2-10у=0*
6. *4х2+9у2-40х+36у+100=0*
7. *х2+2х-20у-79=0*
8. *х2-4у2+8у-8=0*
9. *х2+у2+4х-2у-4=0*
10. *х2+4у2-16=0*
11. *х2+у2-2х+4у-20=0*
12. *16х2-9у2-64х-18у+199=0*

**Упражнения для самостоятельной работы**

1. *х2-у2-16=0*
2. *9х2-16у2-54х-64у-127=0*
3. *9х2+4у2-18х-8у-23=0*
4. *4х2+9у2-18у-27=0*
5. *9х2-4у2+8у-40=0*
6. *х2+у2+2х-2у-2=0*
7. *4х2+у2-8х+2у+1=0*
8. *х2+у2-4х+2у+4=0*
9. *х2-у2-25=0*
10. *4х2-у-4=0*
11. *х2-у2-4=0*
12. *25х2-100+4у2=0*
13. *х2+у2+10у=0*
14. *4х2-у2-64=0*
15. *х2+4у2+2х-3=0*
16. *-2х2-16х+2у-10=0*

**Тест по разделу «Элементы аналитической геометрии»**

1. Даны уравнения линий у^2=х, у=х^2+1, х-у=0. Найти среди них уравнение прямой
   1. у^2=х
   2. у=х^2+1
   3. х-у=0
2. Написать уравнение окружности с центром в начале координат, радиусом равным 2
   1. х^2 + у^2 = 4
   2. х^2 + у^2 = 2
   3. (х – 2)^2 + (у – 2)^2 = 4
3. К кривым второго порядка не относится
   1. гипербола
   2. прямая
   3. эллипс
4. Какого типа уравнения прямой не существует
   1. каноническое уравнение прямой
   2. уравнение прямой с угловым коэффициентом
   3. естественное уравнение прямой
5. Найдите уравнение эллипса
   1. hello_html_6d45831c.png
   2. 
   3. 
6. Найдите уравнение гиперболы
   1. hello_html_6d45831c.png
   2. 
   3. 
7. Найдите уравнение окружности
   1. hello_html_6d45831c.png
   2. 
   3. 
8. Даны векторы hello_html_60e512ae.png, тогда координаты вектора hello_html_m4f4bbf6.pngравны
   1. (–14; –15)
   2. (–14; 9)
   3. (–14; 5)
9. Найдите каноническое уравнение прямой
   1. hello_html_m564d8359.png
   2. 
   3. hello_html_144bae1f.png
10. Найдите уравнение прямой с угловым коэффициентом
    1. hello_html_m564d8359.png
    2. 
    3. hello_html_144bae1f.png
11. Уравнение окружности, изображенной на рисунке, имеет вид



1. hello_html_8086410.png
2. hello_html_24004ceb.png
3. hello_html_5c669649.png

**Раздел 3. Основы математического анализа**

**Тема 3.1 Теория пределов. Непрерывность функций**

**Практическое занятие № 10 Вычисление пределов числовых последовательностей. Вычисление пределов функций. Раскрытие неопределенностей**

**Цели занятия:**Научиться вычислять пределы числовых последовательностей и пределы функций. Изучить правила раскрытия неопределенностей.

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами вычисления пределов числовых последовательностей и функций**

Техника вычисления пределов.

При вычислении предела элементарной функции f(x) приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

1. Функция f(x) определена в предельной точке х=а. Тогда

2. Функция f(x) в предельной точке х=а не определена или же вычисляется предел функции при х—>со. Тогда вычисления предела требует в каждом случае

индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее, простых) вопрос сводится непосредственно к применению теорем о свойствах бесконечно больших и бесконечно малых функций и связи между ними.

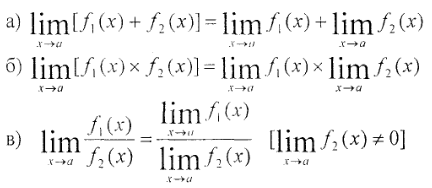
Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда функция f(x) в точке х=а или при х —со представляет собой неопределенность

( типа )

Приведем основные теоремы, на которых основано вычисление пределов.

1. Если существуют

То:



2. Если в некоторой окрестности точки х=а (кроме, быть может, точки а) выполнено условие f(x) = (х) и если предел одной из этих функций в точке а существует, то

3. Если существует и f(x) – элементарная функция, то

Например,

1. Первый замечательный предел:

Следствия: ; =

Пример.**.** Найти hello_html_m41b182f9.gif

Решение.

Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции hello_html_m72a16662.gifи hello_html_m75302f8c.gifявляются бесконечно большими. Поэтому, hello_html_m21436266.gif. Следовательно, имеем дело с неопределенностьювида hello_html_2ca23c96.gif**.**

Для раскрытия этой неопределенности выделим в числителе и в знаменателе hello_html_43416eac.gifв старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

hello_html_ma6f49ea.gif

Пример. Найтиhello_html_2d0a6ffb.gif

Решение.

Для раскрытия неопределенности hello_html_5e3f05a4.gifв этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

hello_html_1b508791.gif

Пример.**.** Найтиhello_html_759e6ef1.gif**.**

Решение.

Для раскрытия неопределенности hello_html_5e3f05a4.gifв этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

hello_html_333aaf73.gif

Пример. Найти предел hello_html_31098860.gif.

Для нахождения этого предела разложим на множители числитель и знаменатель данной дроби.

x2 – 6x + 8 = 0; x2 – 8x + 12 = 0;

D = 36 – 32 = 4; D = 64 – 48 = 16;

*x1 = (6 + 2)/2 = 4; x1 = (8 + 4)/2 = 6;*

*x2 = (6 – 2)/2 = 2 ; x2 = (8 – 4)/2 = 2;*

Тогда hello_html_ee0b220.gif

Пример. Найти предел.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

*x2 – 3x + 2 = (x – 1)(x – 2)*

*x3 – 6x2 + 11x – 6 = (x – 1)(x – 2)(x – 3)*, т.к.

x3 – 6x2 + 11x – 6 x - 1

x3 – x2 x2 – 5x + 6

- 5x2 + 11x

- 5x2 + 5x

6x - 6

6x - 6 0

**2. Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить предел последовательности.
2. hello_html_m4c9bfe25.gif.
3. Доказать по определению предела..
4. hello_html_5124933b.gif
5. Вычислить пределы функций.

1)hello_html_m640f2c03.gif; 2) hello_html_m53913ead.gif;

3) hello_html_866ceb.gif; 4) hello_html_5fd2d06d.gif;

5) hello_html_m48f49bf1.gif; 9) hello_html_m2a9f0301.gif.

11) hello_html_4baf3ecd.gif; 12) hello_html_3e9c7ee5.gif;

14) hello_html_mfbfa6e7.gif; 15) hello_html_m68a51420.gif;

16) hello_html_m30e8a7f2.gif; 17) hello_html_m2de15c82.gif;

**Практическое занятие № 11 Вычисление пределов функций с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей**

**Цели занятия:** Научиться раскрывать неопределенности с помощью замечательных пределов

**Ход занятия:**

* 1. **Ознакомиться с примерами вычисления пределов функций с помощью замечательных пределов**

Тема: “I и II замечательные пределы”.

Цель: 1) расширить представление о неопределенности и методах раскрытия

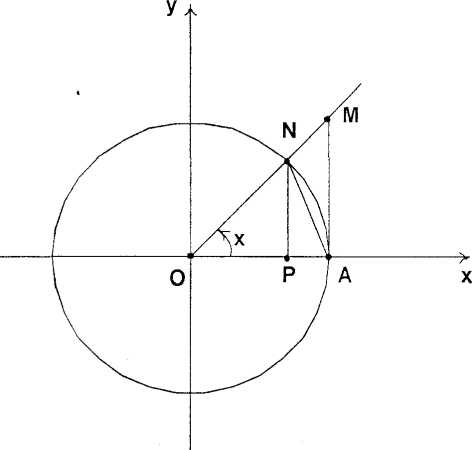
1. выработка навыков вычисления пределов
2. формирование культуры логического мышления.

Ход урока:

1. I замечательный предел, его следствия.

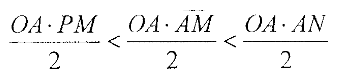
Рассмотрим . В данном случае использование теоремы о пределе

частного дает неопределенность вида 0/0. используем геометрические соображения.

Возьмем окружность радиуса R и центральный угол х, выраженный в радианной мере. OA=R. Проведем хорду через AM и касательную AM.

По чертежу видно что: площадь АОМ < площади сектора АОМ < площади AON.

Выразим формулами эти площади:

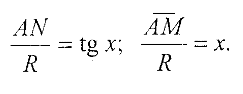


Сократим на и получим

PM < < AN

Разделим равенство на R (R>0):

Но по определениям

****

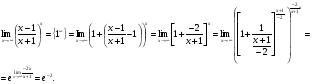
Пример.. Найтиhello_html_m398d838a.gif

Для раскрытия неопределенности hello_html_5e3f05a4.gifв этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: hello_html_m2ade2ca8.gif

hello_html_1861f0d4.gif

Пример.**.** Найтиhello_html_m1dfe9c8c.gif**.**

Для раскрытия неопределенности hello_html_m46b82c63.gifв этом случае, нужно выделить второй замечательный предел:hello_html_29ef6d2e.gif.



**2. Выполнить следующие упражнения**

hello_html_65eeb23.gif

hello_html_m3da4e7fa.gif;

hello_html_593118bd.gif;

hello_html_m4e1ab402.gif;

hello_html_3460ff07.gif;

hello_html_3214c079.gif.

**Практическое занятие № 12 Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва**

**Цели занятия:** Научиться вычислять односторонние пределы и определять тип точек разрыва

**Ход занятия:**

1. **Ознакомиться с примерами вычисления односторонних пределов и определения типа точек разрыва**

Тема: “Непрерывность в точке и на промежутке. Свойства непрерывных функций. Точки разрыва, их классификация.”

Цель: 1) ввести определения непрерывной функции и ее свойств, точек разрыва

1. выработка умения проверять непрерывность функции аналитически, анализировать ее по графику функции.
2. расширение представления о свойствах и графиках функции, выработка навыков построения графиков, исследования свойств функции.
3. Непрерывность функции.

Определение. Функция у = f(x) называется непрерывной в точке х = а, если предел функции в точке х = а совпадает со значением функции в этой точке.

Следует различать односторонние пределы функции в точке, т.е. предел функции слева от точки х = а (записывается ) и справа от точки х = а

(записывается

Алгоритм проверки непрерывности.

1. Найти левый и правый предел функции в точке х = а.
2. Найти значение f(a).
3. сравнить полученные значения.

Если ,то точка х = а называется

точкой непрерывности. Если равенство не выполняется, то точка х = а называется точкой разрыва.

Определение. Функция у = f(x) называется непрерывной на некотором интервале, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Свойства непрерывных функций (теоремы).

Е Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций в точке х =а есть непрерывная в этой точке функция (для частного знаменателя в точке х =а не равна нулю).

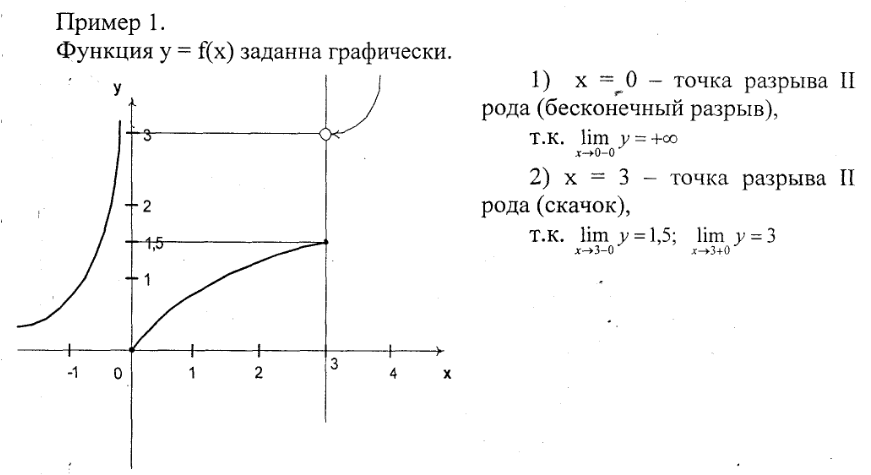
1. Элементарные функции непрерывны в каждой точке своей области определения.
2. Если функция у = f(x) непрерывна на интервале и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри этого интервала существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в ноль.
3. Если функция непрерывна на интервале, то среди значений, принимаемых ею на нем существует наименьшее и наибольшее значения. При этом она принимает все значения между наибольшим и наименьшим.

II. Классификация точек разрыва.

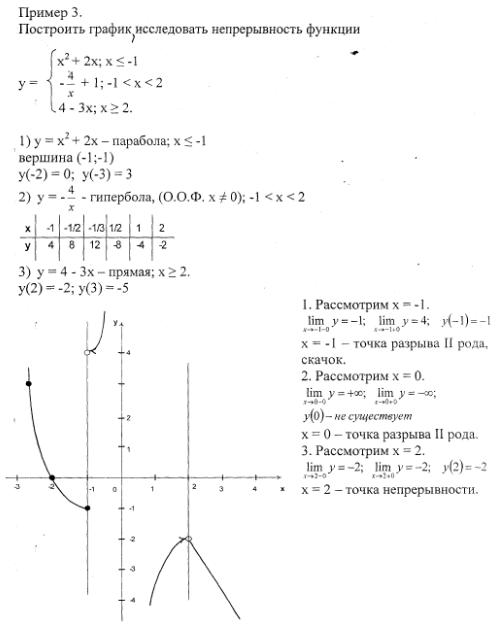
1. Если - неопределенно, m=const, to точка,x = а называется точкой разрыва I рода, вид разрыва - устранимый.
2. , то точка x = а называется точкой разрыва II

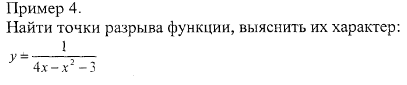
рода, вид разрыва - скачок, величина скачка h = |m-n| .

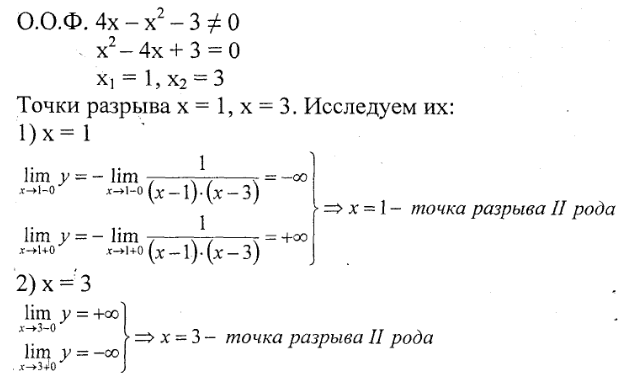
1. Если хотя бы один односторонних пределов равен ± точке х =а , то точка х =а называется точкой разрыва II рода, вид разрыва - бесконечный.

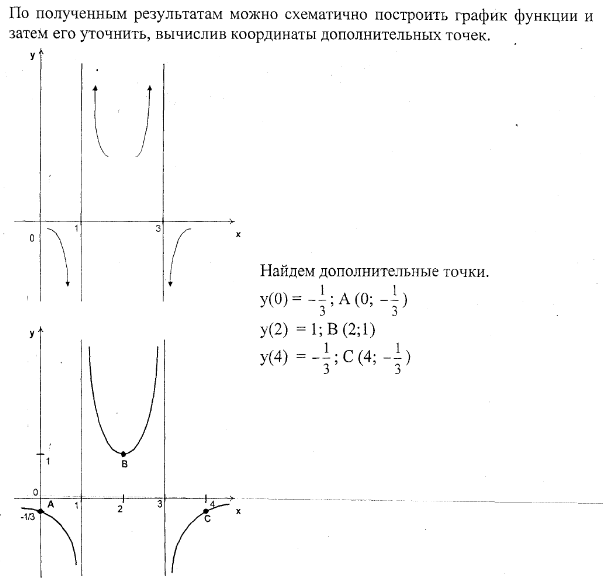












Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

в точке х = -1 функция непрерывна в точке х = 1 точка разрыва 1 – го рода

у

3

2

-4 -1 0 1 х

Пример. Исследовать на непрерывность функцию и определить тип точек разрыва, если они есть.

в точке х = 0 функция непрерывна в точке х = 1 точка разрыва 1 – го рода

у

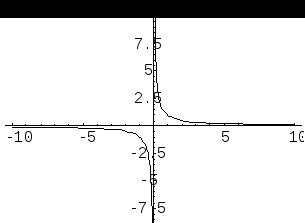
2

1

-p -p/2 0 1 x

Пример. Функция f(x) = hello_html_56e59d5e.gifимеет в точке х0 = 0 точку разрыва 2 – го рода, т.к.

hello_html_75c57426.gif.

hello_html_m158a19a0.gif

Пример.**.** hello_html_21fea37e.gif**.**

Найдем левый и правый предел функции в точке hello_html_2df2dd01.gif.

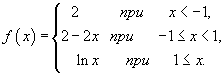
hello_html_6a87b9b6.gif

hello_html_1b13f133.gif

Левый предел конечен и равен 0, а правый бесконечен. Тогда, по определению, hello_html_2df2dd01.gif- точка разрыва второго рода.

**2. Выполнить следующие упражнения**

Указать характер точек разрыва функции.

1. hello_html_18d0097.gif.
2. hello_html_3876a58e.gif.
3. http://www.matburo.ru/Examples/ma_nepr/img1-0.gif
4. 

**Тема 3.2 Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной**

*Тема* «Производная функции, определенно, правило нахождения производной. Физический смысл производной; Производная степенной функции».

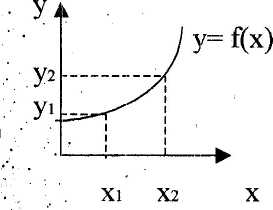
*Цель:*

1. ввести понятие производной
2. дать алгоритм нахождения производной
3. расширить представление учащихся о методах исследования •; функции.

* Ход урока.

1. Определение производной.

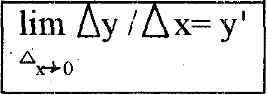
Задана непрерывная функция у= f(x)

при x=x1 у1 = f(x1) при x =x2 y2=f(x2)

х = Х2 –X1 -называется приращением аргумента.

у= у2-y1-называется приращением функции.

Определение. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента, если приращение аргумента бесконечно мало, называется производной данной функции

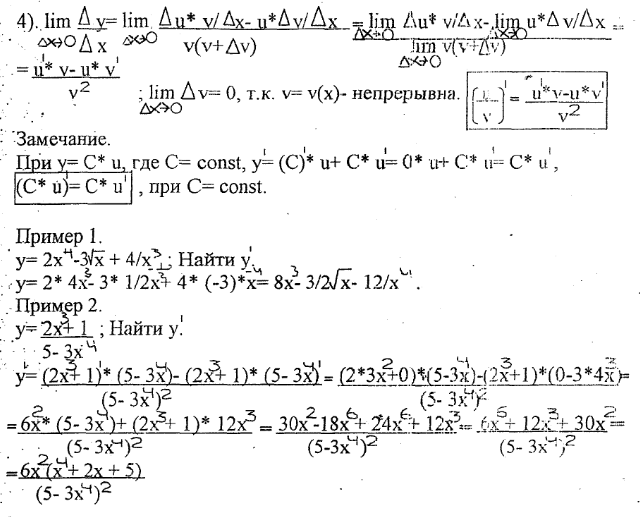
 

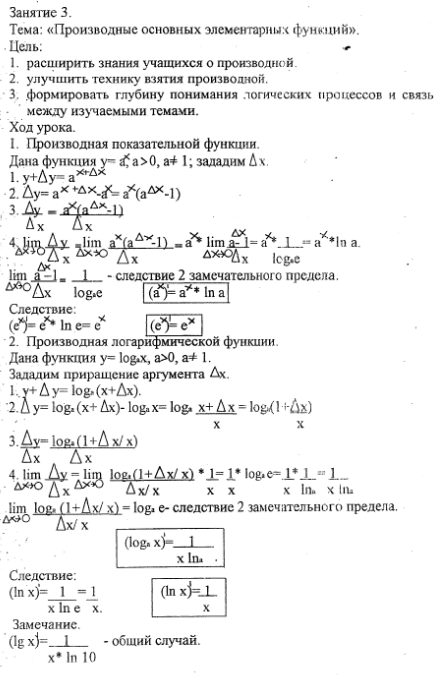
2.. Данное определение носит характер алгоритма. Для нахождения производной функции у= f(x) необходимо выполнить следующие действия;

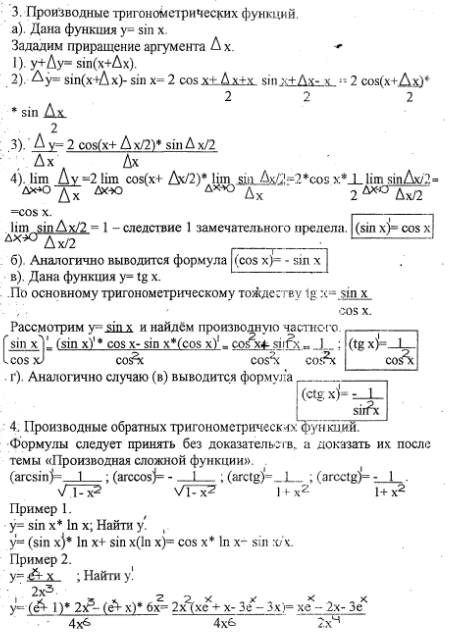
1. Найти приращённое значение функции y+
2. Найти приращение функции
3. Рассмотреть дробь
4. Найти

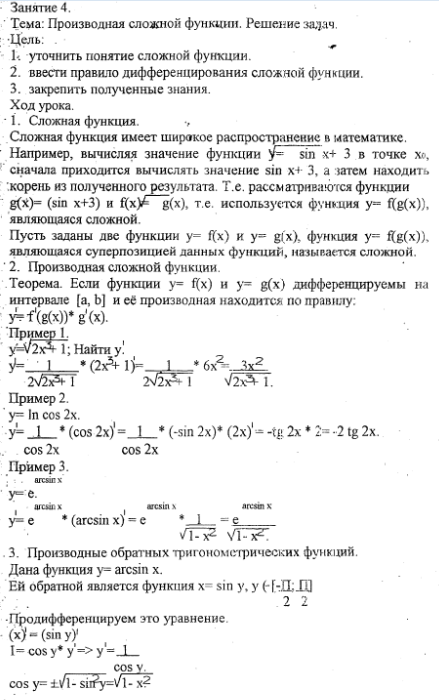
Полученный результат является производной.

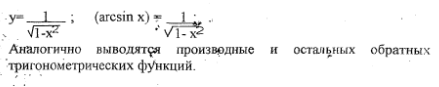


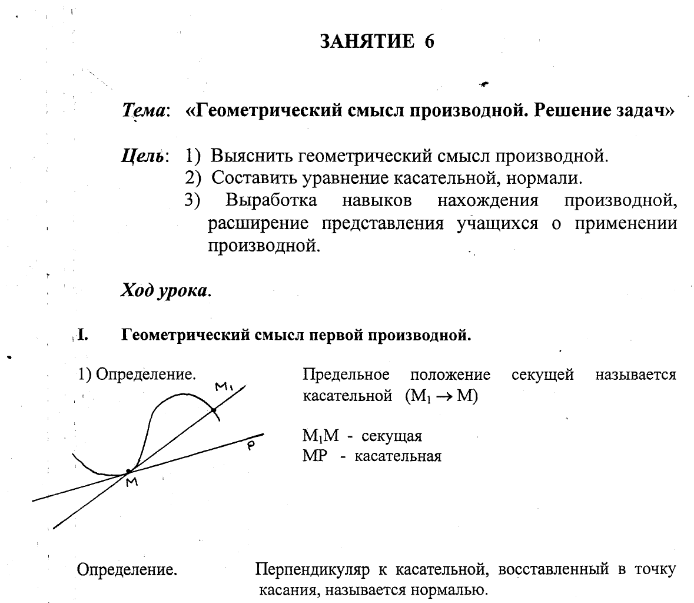


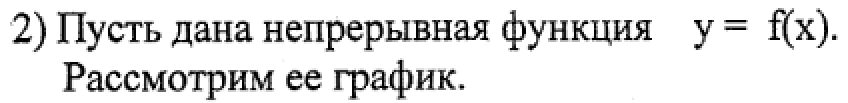


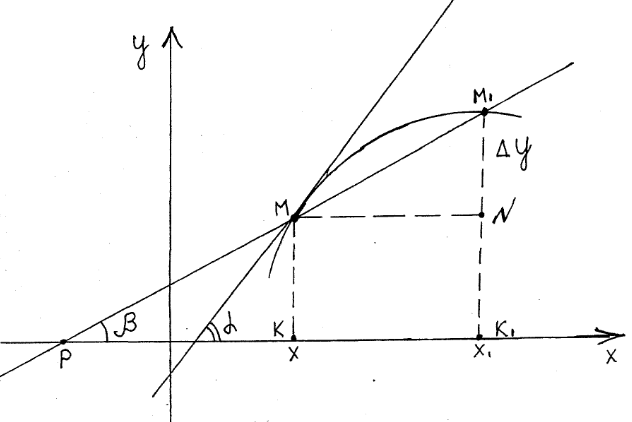


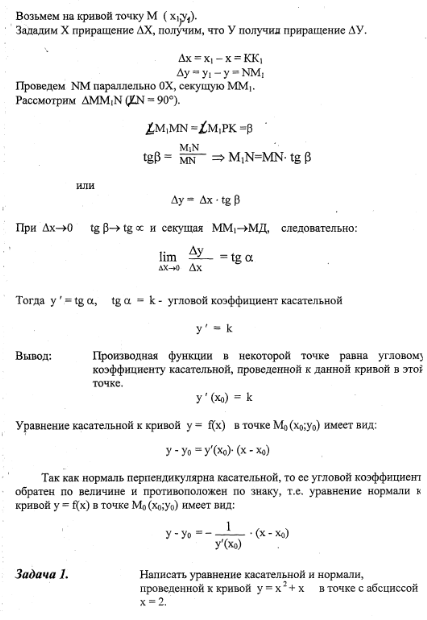


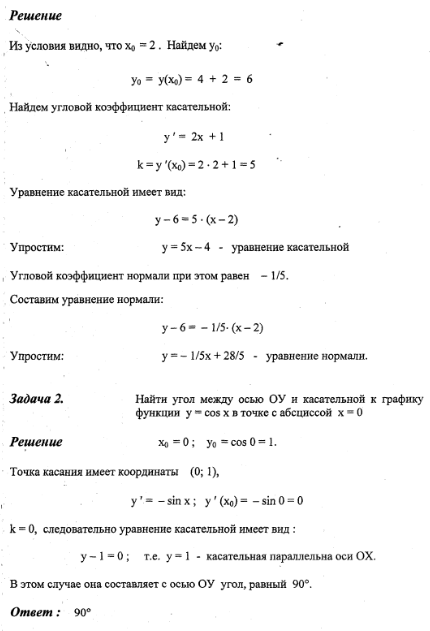


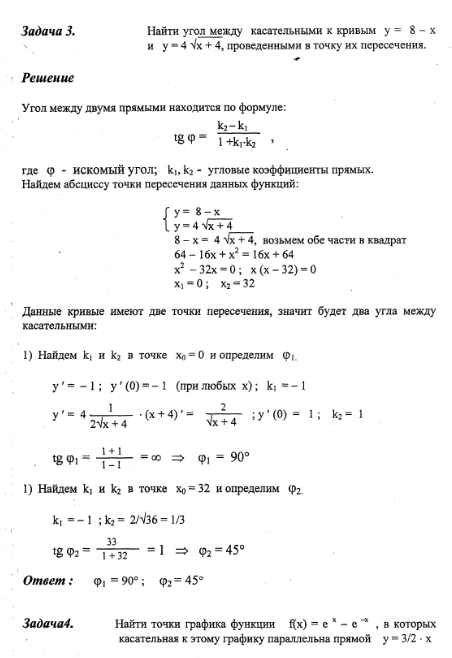


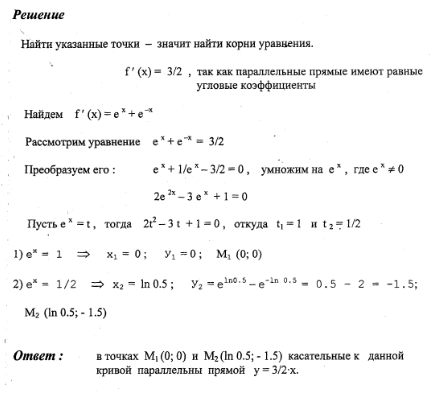


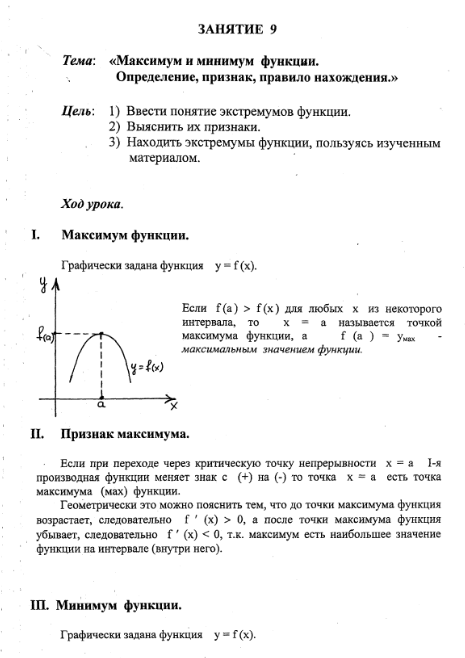


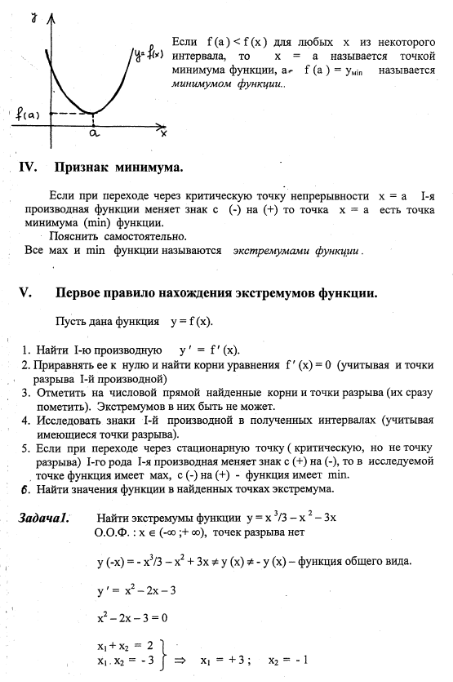


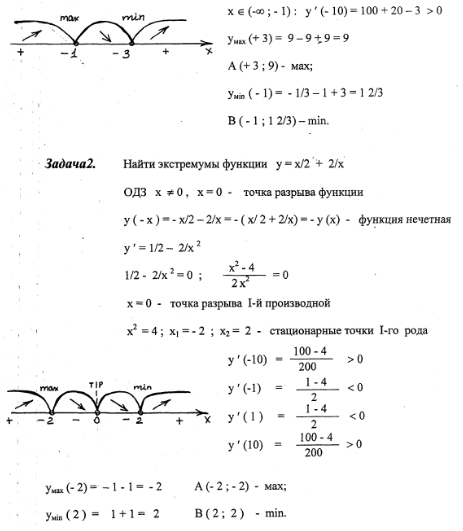


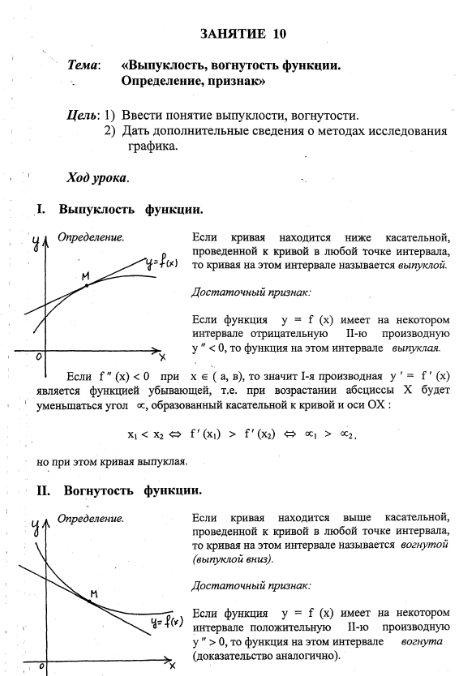


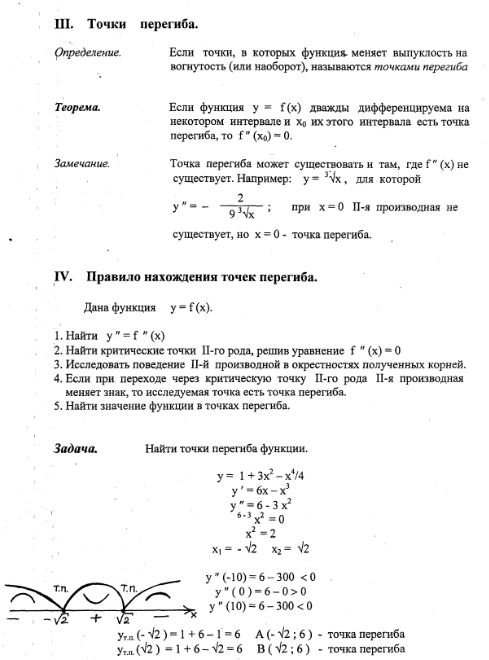


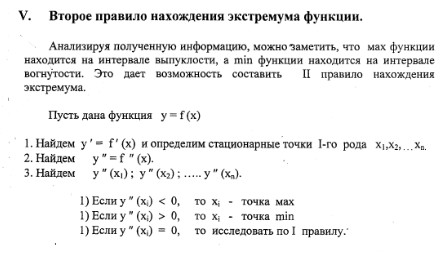


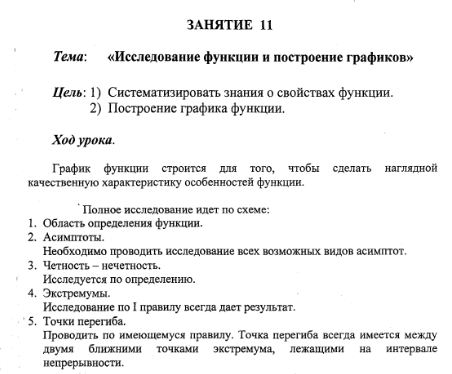


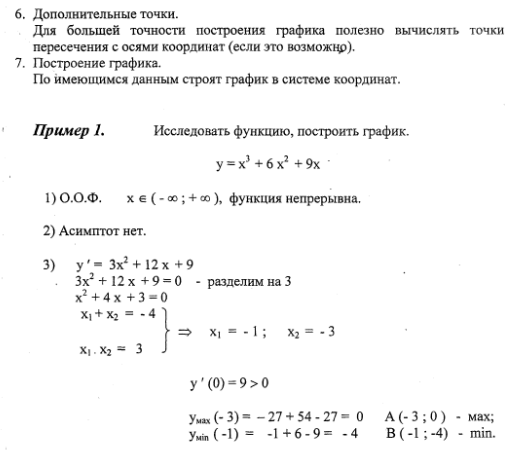


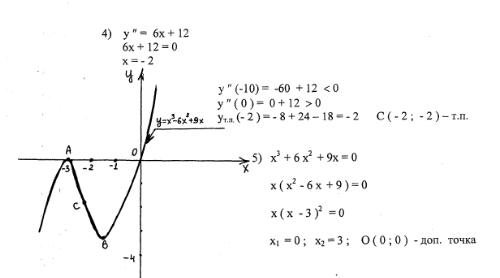


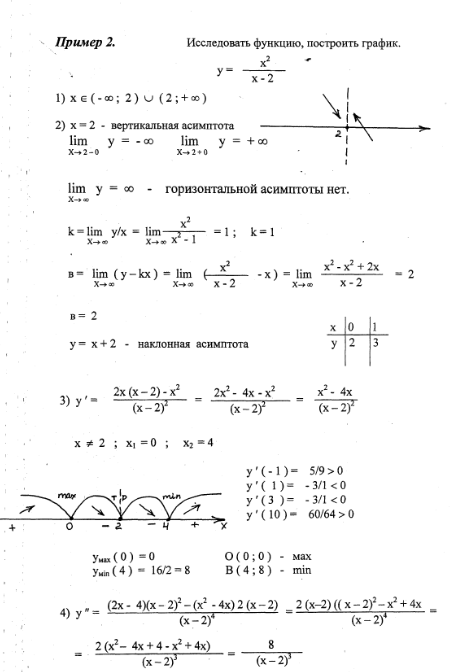


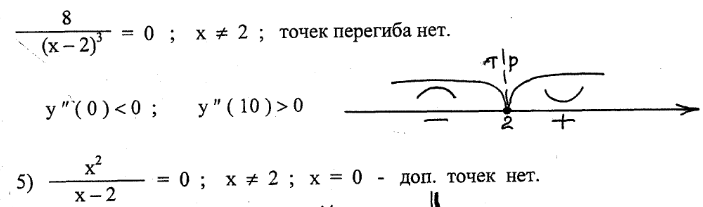


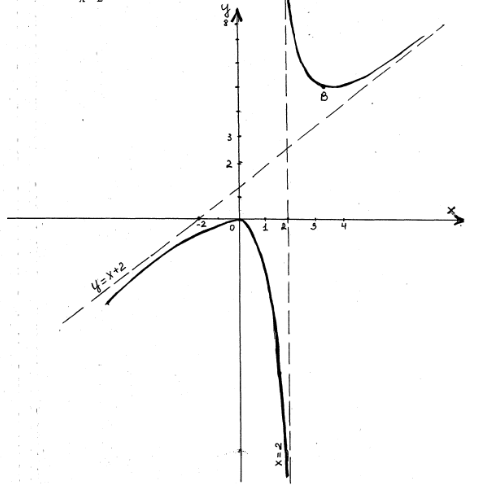












**Практическое занятие № 13 Вычисление производных сложных функций**

**Цели занятия:** Научиться находить производные сложных функций

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами вычисления производных сложных функций**

Пример. Найти производную функции.

Сначала преобразуем данную функцию:

1. **Выполнить следующие упражнения**
2. hello_html_m185e3103.gif
3. hello_html_22b91c91.gif
4. hello_html_m447c2aaa.gif
5. hello_html_6d5da012.gif
6. hello_html_4107ff73.gif
7. hello_html_6275dceb.gif
8. hello_html_331659d6.gif
9. hello_html_m56986659.gif

**Практическое занятие № 14 Вычисление производных и дифференциалов высших порядков**

**Цели занятия:** Научиться вычислять производные и дифференциалы высших порядков

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами вычисления производных и дифференциалов высших порядков**

а) Производная явной функции

Пример. Найти производную функцииhello_html_247d5989.gif

Дифференцируя функцию hello_html_m13f1b58d.gif, получим hello_html_m62d9e6a.gif.

Дифференцируя производную hello_html_m1b7c01ac.gif, получим hello_html_42e1d431.gif

б) Производная неявной функции

Пример. Для данной неявной функции найти hello_html_m4521a03d.gif.

hello_html_m5071e034.gif

Дифференцируем по hello_html_2e673d50.gifобе части равенства, где hello_html_m13f1b58d.gifесть функция от hello_html_2e673d50.gif, получаемhello_html_52bd86db.gif

Отсюда найдем hello_html_m1b7c01ac.gif.

hello_html_m2775f335.gif

Найдем hello_html_m4521a03d.gif:

hello_html_2c1c3ff3.gif

Подставляем в левую часть найденную производную hello_html_m3d40e71d.gif, получаем:

hello_html_m39ed02ce.gif.

Учитывая, что hello_html_5686cf50.gif, получим hello_html_m680a54eb.gifили hello_html_71a7f16a.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Вычислить вторую производную функции

hello_html_38e74dbb.gif

hello_html_m113b5b5b.gif

hello_html_m1fb10944.gif

hello_html_15a57950.gif

hello_html_m499f71cb.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Вычислить предел, используя правило Лопиталя

http://www.cleverstudents.ru/theory/images/limits/196.png

http://www.cleverstudents.ru/theory/images/limits/200.png

http://www.math24.ru/images/8lim16.gif

Найти асимптоты графика функции

http://www.mathmath.ru/img3443.png

http://www.mathmath.ru/img3512.png

**Практическое занятие № 16 Нахождение экстремумов. Исследование функции на монотонность. Исследование функции на выпуклость. Точки перегиба**

**Цели занятия:** Научиться находить экстремумы. Научиться исследовать функцию на монотонность и на выпуклость.

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами нахождения экстремумов функций, исследования функций на выпуклость**

**2. Выполнить следующие упражнения**

Провести полное исследование функций методами дифференциального исчисления и построить графики:

hello_html_m4b5de193.gif

б)

hello_html_13a22ff0.gif

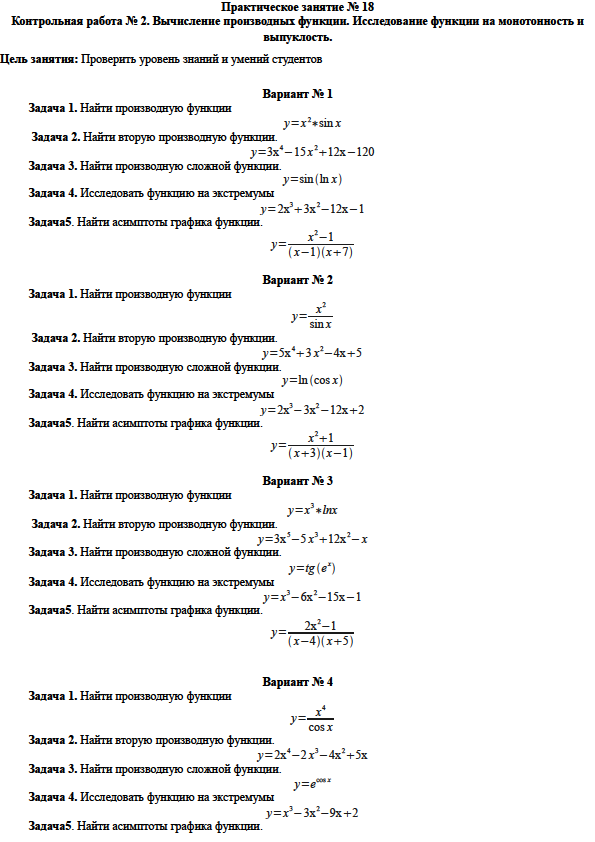
в)

hello_html_m746e6335.gif

**Практическое занятие № 18 Контрольная работа № 2. Вычисление производных функций. Исследование функции на монотонность и выпуклость**

**Цели занятия:** Проверить умение студентов вычислять производную функции и исследовать функцию на монотонность и выпуклость.

**Ход занятия:** Решить предложенные задачи согласно своему варианту



**Тест по теме «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»**

1. Чему равен предел функции hello_html_73e0f80f.gif
   1. 2/5
   2. 1
   3. 5/2
2. Найти вторую производную функции y=x4+5sin x
   1. x2-5sin x
   2. 12x2-5sin x
   3. 12x2+5sin x
3. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна y'=x-4
   1. 0
   2. 2
   3. 1
4. Как называется предел hello_html_ma2b6502.gif
   1. Первый замечательный предел
   2. Второй замечательный предел
   3. Полезный предел
5. Как находится производная произведения двух функций *U\*V*
   1. *U'\*V'*
   2. *U'\*V+U\*V'*
   3. *U'\*V-U\*V'*
6. Производная функции y=sin x равна
   1. cos x
   2. -cos x
   3. sin x
7. Если для функции выполнено условие f(-x)= f(x), то функция
   1. общего вида
   2. нечетная
   3. четная
8. Чему равен предел функции hello_html_40b06362.gif
   1. 1
   2. 5/3
   3. 3/5
9. Найти вторую производную функции y=x3 -4cos x
   1. 6x+4cos x
   2. 6x-4cos x
   3. x+4cos x
10. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна y'=x2-4
    1. 0
    2. 2
    3. 1
11. Как называется предел
    1. Первый замечательный предел
    2. Второй замечательный предел
    3. Полезный предел
12. Как находится производная частного двух функций
    1. *U'\*V+U\*V'*
13. Производная функции y=cos x равна
    1. sin x
    2. -sin x
    3. cos x
14. Если для функции выполнено условие f(-x)= - f(x), то функция
    1. общего вида
    2. нечетная
    3. четная

**Тема 3.3 Интегральное исчисление функции одной действительной переменной**

**Практическое занятие № 19 Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле**

**Цели занятия:** Научиться вычислять неопределенные интегралы методами заменой переменной и интегрированием по частям

Всякий раз, когда в математике рассматривается некоторая операция, возникает вопрос об операции, к ней обратной (сложение - вычитание, умножение - деление, возведение в степень - извлечение корня). При рассмотрении обратной операции возникают вопросы:

1. осуществимость операции.
2. единственность операции.

Таким образом, после введения операции дифференцирования

возникает вопрос об обратной операции, которая называется

1

интегрированием. Также нельзя обойти вопросы осуществимости и единственности операции.

Рассмотрим определение:

Если задана функция f(x), то функция F(x), заданная для тех же значений аргумента и удовлетворяющая условию F (х) = f(x) называется первообразной для функции f(x).

Если существует одна первообразная F(x), то значит можно

указать множество функций вида F(x) + С, где С = const, тоже

являющихся первообразными для функции f(x).

Это можно доказать по определению первообразной. Возьмем производную (F(x) + С)1 = F 1 (х) + С1 = F 1 (х) + 0 = F 1 (х)

Следовательно функция F(x) + С, где С = const, также есть

I

первообразная для F(x).

Определение: Множество всех первообразных функций F(x) + С, где С = const, называются неопределенным интегралом для функции f(x) dx :

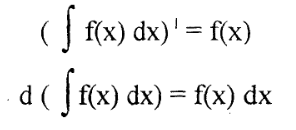
F:\скан мат Латыш  МАТ АНАЛИЗ 17-18\media\image53.jpeg

Таким образом, становится ясно, что действие нахождения неопределенного интеграла является действием неоднозначным.

I

Свойства неопределенного интеграла.

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, а дифференциал от него равен подынтегральному выражению:

****

1. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции плюс произвольная постоянная:

****

1. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

****

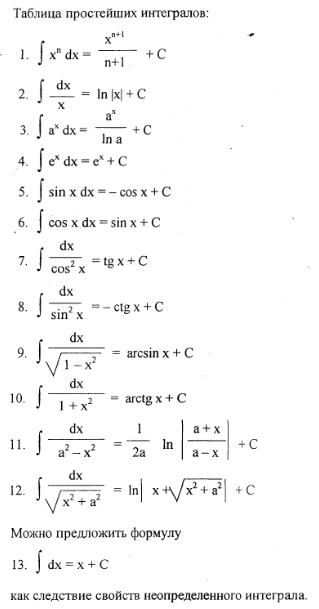
1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от слагаемых функций:

****

Свойства не доказываются.

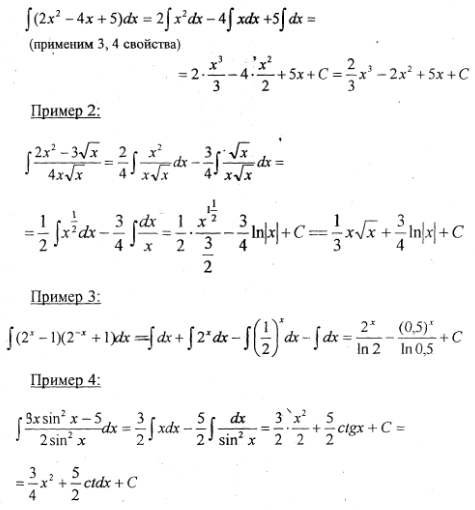
Имея представление о том, что интегрирование есть действие обратное дифференцированию, можно предложить студентам попытаться прочитать эти формулы в обратную сторону и совместно составить таблицу формул интегрирования. Исключение составят в ней формулы 11, 12, которые следует давать в

группах младших инженеров, предлагая запомнить.

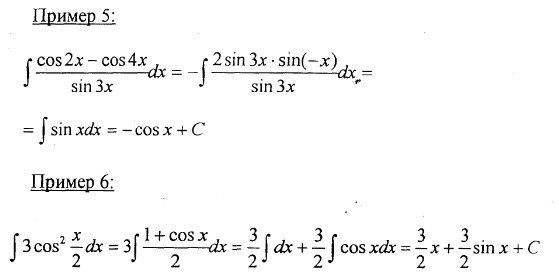
****

Простейшим методом нахождения неопределенного интеграла является метод непосредственного интегрирования. Суть метода заключается в преобразовании подынтегрального выражения к табличному виду и употреблении подходящей формулы.

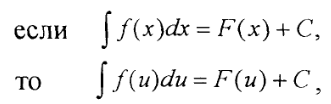
Следует рассмотреть некоторые примеры.



**I**

****

**В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:**



**где u(х) - произвольная дифференцируемая функция от х. Замена переменной производится с помощью подстановки двух**

**видов:**

\

**1) х = (t), где t - новая переменная, a (t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае**



**Функцию (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.**

1. **t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:**



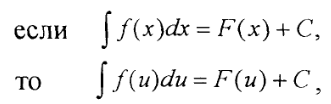
Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.

Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(х), v = v(x).

Выразим u . dv : u . dv = d(uv) - v . du.

Проинтегрируем это выражение:

**В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:**



**где u(х) - произвольная дифференцируемая функция от х. Замена переменной производится с помощью подстановки двух**

**видов:**

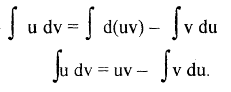
\

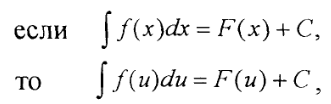
**1) х = (t), где t - новая переменная, a (t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае**



**Функцию (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.**

1. **t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:**
2. Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.
3. Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(х), v = v(x).
4. Выразим u . dv : u . dv = d(uv) - v . du.
5. Проинтегрируем это выражение:

**В основе метода подстановки (или замены перемнной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, заключающееся в следующем:**



**где u(х) - произвольная дифференцируемая функция от х. Замена переменной производится с помощью подстановки двух**

**видов:**

\

**1) х = (t), где t - новая переменная, a (t) - непрерывная дифференцируемая функция. В этом случае**



**Функцию (t) стараются выбрать таким образом, чтобы правая часть предыдущей формулы приобрела более удобный для интегрирования вид.**

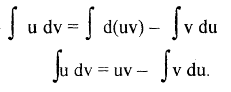
1. **t = g(x), где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной:**

Выведем формулу метода интегрирования по частям. Пусть u ; v - непрерывно дифференцируемые функции.

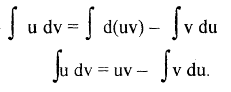
Рассмотрим d(uv) = u . dv + v . du, где и = и(х), v = v(x).

Выразим u . dv : u . dv = d(uv) - v . du.

Проинтегрируем это выражение:



Полученный результат есть формула интегрирования по частям. С помощью этой формулы нахождение сводится к нахождению . Применение интеграла целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл проще данного или ему подобен. При этом в качестве и берется функция, которая в результате дифференцирования упрощается.

1. Полученный результат есть формула интегрирования по частям. С помощью этой формулы нахождение сводится к нахождению . Применение интеграла целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл проще данного или ему подобен. При этом в качестве и берется функция, которая в результате дифференцирования упрощается.
2. 



**2. Выполнить следующие упражнения**

Вычислить неопределенные интегралы

а) hello_html_16372da5.gif

б) hello_html_m3ed56bf3.gif

в) hello_html_31a4f48.gif

г) hello_html_2abee651.gif

д) hello_html_5691543a.gif

е) hello_html_57d7ceb4.gif

ж) hello_html_5bcd7f47.gif

**Практическое занятие № 21 Вычисление определенных интегралов.Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла**

**Цели занятия:** Научиться вычислять определенные интегралы

**Ход занятия:**



Задача: Задана фигура, ограниченная линиями у = f(x), f(x) 0; х =а, х =b; у = 0, называемая криволинейной трапецией.

Надо найти её площадь.

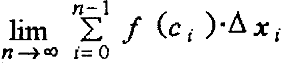
Изобразим данную фигуру и зададим разбиение интервала [а,b] на n произвольных частей и построим ступенчатую фигуру.

На каждом i-том сегменте выберем точку Ci и найдём f(Ci). Тогда площадь i — го прямоугольника Si=f(Ci)\*i

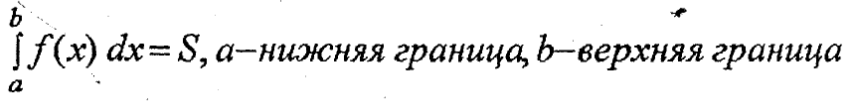
Площадь ступенчатой фигуры равна:



**Пусть , тогда max**

Рассмотрим:  Если этот предел существует,

является конечным и равен S, то этот предел называется определённым интегралом в границах от а до b функции f(x)dx. Эта запись имеет вид:



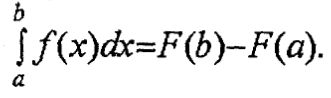
Так как при S ступенчатой фигуры приближается к S криволинейной трапеции, то геометрически определённый интеграл равен площади криволинейной трапеции.

Следует заметить, что вычисление определённого интеграла по определению сложно, до XVII века такие задачи носили частный характер. Сдвиг в этот процесс внесли Ньютон и Лейбниц, указав, что вычисление определённого интеграла сводится к отысканию первообразных и нахождению их приращения на данном промежутке.

Свойства определённого интеграла.

1. Теорема Ньютона - Лейбница.

Если функция y=F(x) есть первообразная для функции y=f(x) на [а,b], то



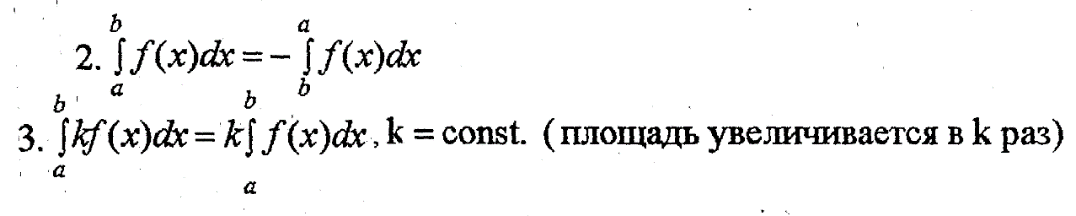
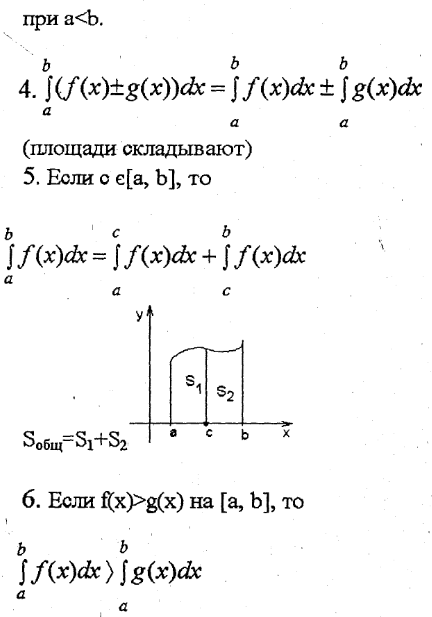
(т.е. интеграл равен приращению первообразной на этом интервале).

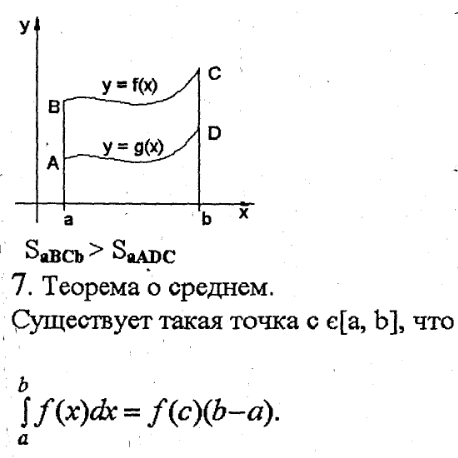
Эта теорема устанавливает связь между неопределённым и определённым интегралами: неопределённый интеграл - общее выражение первообразной данной функции, а определённый интеграл - число, представляющее собой предел интегральных сумм.

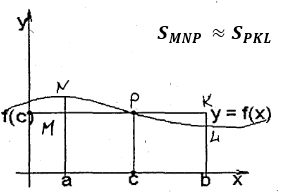
Замечание: последующие теоремы пройдут без доказательств, но они наглядно иллюстрируются геометрическим представлением.

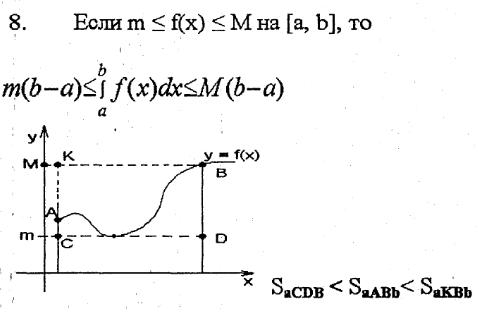
1.

(т.к. S криволинейной трапеции не существует).









**1. Ознакомиться с примерами вычисления определенных интегралов и нахождения площадей плоских фигур**

**Практическое занятие № 23 Решение задач на приложение интегралов**

**Цели занятия:** Научиться решать задачи, используя понятие интеграла

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами задач, при решении которых используется понятие определенного интеграла**

определённого интеграла.

Цель:

\ \*

1. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;
2. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;
3. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

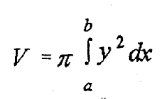
Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.

П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.

Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

1. Если тело, образовано вращением плоской фигуры, ограниченной двумя линиями у = f (х), х = а, х = b, у = 0, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:



1. Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями х = (у), у = а, у = b, х = О, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:

определённого интеграла.

Цель:

\ \*

1. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;
2. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;
3. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

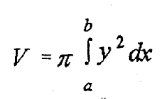
Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.

П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.

Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

1. Если тело, образовано вращением плоской фигуры, ограниченной двумя линиями у = f (х), х = а, х = b, у = 0, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:



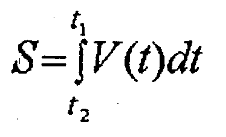
1. Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями х = (у), у = а, у = b, х = О, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью

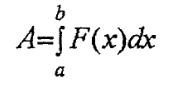
V=V(t) (м/с), то за время от t1 до t2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:



Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ох, то работа, совершаемая силой на отрезке [а, b], вычисляется по формуле:



При этом сила определяется законом Гука:

F= kx; где х - величина деформации, k - коэффициент пружины.

1. Давление жидкости.

Сила давления Р жидкости плотности р на вертикальную

пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

1. Расширение знаний учащихся о возможности применения определённого интеграла;
2. Воспитание умения переносить знания в новую ситуацию;
3. Выработка навыков вычисления определённого интеграла.

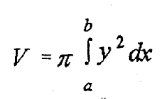
Ход урока:

I. Проверка домашнего задания.

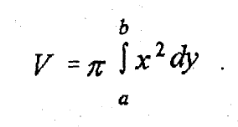
П. Рассмотреть на доске 7, 8 задания.

Ш. Нахождение объёмов тел вращения.

1. Если тело, образовано вращением плоской фигуры, ограниченной двумя линиями у = f (х), х = а, х = b, у = 0, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:



1. Если тело, образованно вращением плоской фигуры, ограниченной линиями х = (у), у = а, у = b, х = О, вокруг оси Ох, то его объём находят по формуле:



**самостоятельная работа по теме«Производная и интеграл»**

**Вариант 1**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) у =2х3(е2х-1+2); у′(0)=? б) у =; у′(1)=?

2. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции у =х3+3х2-9х+4 на интервале [-4;1].

3. Составить уравнение касательной к кривой y = x-2lnx в точке с абсциссой х0=1.

4. Вычислить интегралы:

.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у = х2 и у = х+2.

6. Найти силу, необходимую для сжатия пружины на 0,06 м, если сила в 15Н сжимает ее на 30см.

**Вариант 2**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) у =3х⋅esinx; у′(0)=? б) у =; y′()=?

2.Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции у = 4x+0,25x-1 на интервале [0;1].

3.Вращение точки вокруг оси совершается по закону ϕ(t) = -t3+12t2+7t, где ϕ(t) -угол(рад), t -время(с). Известно, что ускорение а в некоторый момент времени равно 9рад/с2. Найти t0.

4. Вычислить интегралы:



5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у = х2 +4x - 3 и у = 0.

6.Найти давление воды, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющей длину 70см и высоту 30см.

**Вариант 3**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а)

2. Найти произведение максимального и минимального значений функции у = х3 -3х.

3. Найдите абсциссу точки пересечения с осью Ох касательной к графику функции

y = f(x), проходящей через точку (0;10), если f′(0) = -2.

4. Вычислить интегралы:



5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у = -х2 +4x и у = 0.

6.Найти давление воды, наполняющей аквариум, на одну из его стенок, имеющей длину 70см и высоту 30см.

**Вариант 4**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а) =? б)?

2. Найти сумму максимального и минимального значений функции у = .

3.Касательная, проведенная к графику функции  в точке с абсциссой х = 1, имеет вид 4у – 3х + 5 = 0. Найдите у′(1).

4. Вычислить интегралы:

а) ; б)

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у = х2 + 1 и у = х + 3.

6.Скорость прямолинейно движущегося тела равна .Вычислить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

**Вариант 5**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:

а)=? б) =?

2.Найти значения х, при которых , если .

3.Написать уравнение касательной к графику функции  в точке с абсциссой

.

4. Вычислить интегралы:

а); б)

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у = х2 + 3 и у = х + 5.

6.Найти силу давления воды на боковые стенки резервуара, имеющего форму куба с ребром, равным 0,8м, если он заполнен водой наполовину.

**Вариант 6**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:



2. Найти сумму наибольшего и наименьшего значений функции

у =2х3+х2-1 на интервале [-4;1].

3. Составить уравнение касательной к кривой y = cos3x-2 в точке с абсциссой  .

4. Вычислить интегралы:



5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями e=4x-x2 ; y=4-x.

6. Найти силу, необходимую для растяжения пружины на 0,04 м, если сила в 20Н растягивает ее на 80см.

**Вариант 7**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:



2.Найти разность между наибольшим и наименьшим значениями функции

 на интервале(0;1].

3.Найти ускорение материальной точки, движущейся по закону у=tgx;  в момент времени, когда ее скорость равна 2.

4. Вычислить интегралы:



5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями у=6х-х2 и у=х+4.

6.Найти объем тела, образованного вращением плоской фигуры, ограниченной линиями у=2х-х2 и у=0 вокруг оси ОХ.

**Вариант 8**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках: 

2. Найти произведение максимального и минимального значений функции

у = .

3.Масса неоднородного одномерного стержня является функцией длины

у=ех-х-1. Найти плотность стержня в конечной точке х=1.

4. Вычислить интегралы:



5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:



6.Найти путь, пройденный материальной точкой за первые три секунды, если скорость ее движения м/с.

**Вариант 9**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:



2.Составить уравнение касательной к кривой  в точке пересечения с осью ОУ.

3.Найти наибольшее и наименьшее значение функции  на промежутке .

4.Вычислить интегралы:



5.Найти площадь фигуры, ограниченной линиями



6.Найти объем тела, полученного от вращения вокруг оси ординат фигуры, ограниченной линиями у=х2-2х, у=0.

**Вариант 10**

1.Найти производные функций и вычислить их значения в заданных точках:



2.Точка движется прямолинейно по закону у(х)=10+20х-5х2. Найти скорость и ускорение точки на второй секунде.

3.Найти сумму наибольшего и наименьшего значения функции

на промежутке [0;1].

4.Вычислить интегралы:



5.Найти площадь фигуры , ограниченной линиями



6.Найти путь, пройденный телом за третью секунду, если скорость движения задается уравнением м/с.

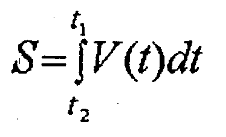
\ \*

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью

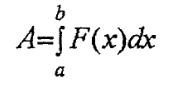
V=V(t) (м/с), то за время от t1 до t2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:



Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ох, то работа, совершаемая силой на отрезке [а, b], вычисляется по формуле:



При этом сила определяется законом Гука:

F= kx; где х - величина деформации, k - коэффициент пружины.

1. Давление жидкости.

Сила давления Р жидкости плотности р на вертикальную

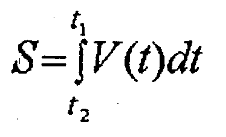
пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

I. Путь, пройденный точкой.

Нахождение пути является физическим смыслом определённого интеграла.

t Если материальная точка движется прямолинейно со скоростью

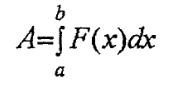
V=V(t) (м/с), то за время от t1 до t2 точка пройдёт путь, определяемый по формуле:



Если движение непрямолинейно, то по указанной формуле можно найти перемещение точки.

П. Работа силы.

Если переменная сила F=F(x) действует в направлении вдоль оси Ох, то работа, совершаемая силой на отрезке [а, b], вычисляется по формуле:



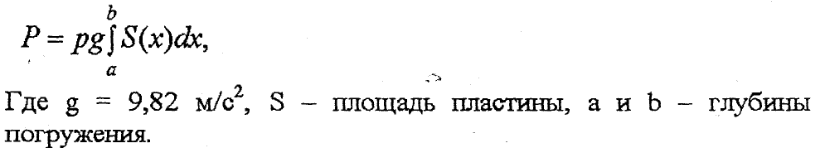
При этом сила определяется законом Гука:

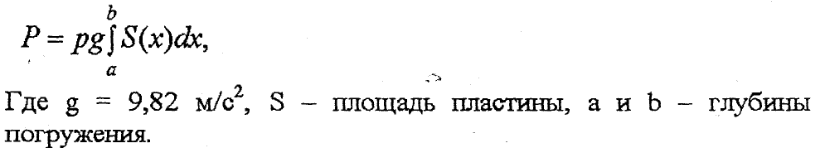
F= kx; где х - величина деформации, k - коэффициент пружины.

1. Давление жидкости.

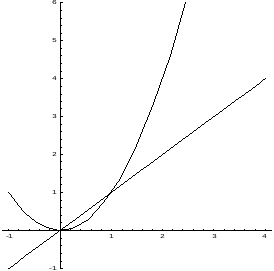
Сила давления Р жидкости плотности р на вертикальную

пластину, погружённую в жидкость, находит по формуле:

****

****

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями y = x, y = x2, x = 2.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

hello_html_72a814e2.gif(ед2)

Пример: Найти объем шара радиуса R.

y

R y

-R 0 x R x

В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса у. В зависимости от текущей координаты х этот радиус выражается по формуле hello_html_7df09e40.gif.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = hello_html_59701dff.gif.

Получаем объем шара:

hello_html_m4c3f71fa.gif.

Пример: Найти объем произвольной пирамиды с высотой Н и площадью основания S.

Q S

x H x

При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где х – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е.

hello_html_m251b432f.gif

Отсюда получаем функцию площадей сечений: hello_html_4aeece9d.gif

Находим объем пирамиды: hello_html_4bc826ca.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1) hello_html_467f6b12.gif; 2) hello_html_4b265d21.gif; 3) hello_html_m851b5f1.gif;

4) hello_html_1cb78dbd.gif; 5) hello_html_m2e57709d.gif.

Найдите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

1) hello_html_5cac974b.gifвокруг оси ОХ;

2) hello_html_37141c36.gifвокруг оси ОХ;

3) hello_html_m6ea74306.gifвокруг оси ОХ;

4) hello_html_m29daf689.gifвокруг оси ОY;

**Практическое занятие № 24 Контрольная работа № 3 Вычисление неопределенных и определенных интегралов**

**Цели занятия:** Проверить уровень подготовки студентов

**Ход занятия:** Решить предложенные задачи согласно своему варианту

**Вариант № 1**

1. Вычислите неопределенный интеграл:
2. Вычислите определенный интеграл:
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

*y=x2 , y=2-x2*

1. Вычислите несобственный интеграл:

**Вариант № 2**

1. Вычислите неопределенный интеграл:
2. Вычислите определенный интеграл:
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

*y2=9x , y=0, x=16, x=25*

1. Вычислите несобственный интеграл:

**Вариант № 3**

1. Вычислите неопределенный интеграл:
2. Вычислите определенный интеграл:
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

*y=x3 , y=8, x=0*

1. Вычислите несобственный интеграл:

**Вариант № 4**

1. Вычислите неопределенный интеграл:
2. Вычислите определенный интеграл:
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной следующими кривыми:

*xy=4 , y=0, x=1, x=4*

1. Вычислите несобственный интеграл:

**Тема 3.4 Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных**

**Практическое занятие № 25 Нахождение области определения и вычисление пределов для функции нескольких переменных**

**Цели занятия::** Научиться находить область определения и вычислять предел функции нескольких действительных переменных

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами нахождения области определения функции нескольких действительных переменных и вычисления пределов данных функций**

Пример Найти область определения функции hello_html_m382bba5e.gif

Функция определена при hello_html_m3587138f.gifСледовательно, областью определения функции является замкнутый круг единичного радиуса с центром в начале координат.

Пример Вычислить предел функции

.  http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image125.gifhttp://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image073.gif.

*В этом примере мы воспользовались тем, что предел элементарной функции в области ее определения равен значению функции в точке.*

*Пример*

http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image127.gif.

Здесь мы воспользовались первым замечательным пределом.

http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image129.gif.

http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image131.gif.

В примерах 3 и 4 мы воспользовались тем, что *x* есть бесконечно малая функция, функции http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image133.gif, http://rewilios.narod.ru/matan/l1.files/image135.gifесть ограниченные функции (по модулю не больше единицы), а произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая функция.

**2. Выполнить следующие упражнения**

Найти область определения функции двух переменных (дать геометрическое истолкование).

**1.** hello_html_m76d86d0e.gif. **3.** hello_html_a802420.gif.

**2.** hello_html_11e155ef.gif. **4.** hello_html_m241399b2.gif.

**Практическое занятие № 26 Вычисление частных производных и дифференциалов функций нескольких переменных**

**Цели занятия:** Научиться находить частные производные и дифференциалы функции нескольких действительных переменных

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами вычисления частных производных функций нескольких действительных переменных**

ПримерНайти частные производные функции hello_html_67e6eadb.gifhello_html_m581fd176.gif

Решение. Считая величину hello_html_2baa70a.gifпостоянной, получаем

hello_html_59547865.gif

Считая величину hello_html_m3f2c2fd7.gifпостоянной, получаем

hello_html_m190f6c73.gif

Пример Найти частную производную hello_html_m56b3e2c5.gifот функции hello_html_68fc5541.gif

Решение. Имеем

hello_html_m720a9392.gif

hello_html_6362c6ce.gif

hello_html_m81e2d51.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Найти частные производные hello_html_76020a41.gif, hello_html_78a7bcab.gifот функции hello_html_76d1c3aa.gif.

**2.1.** hello_html_771dc19b.gif. **2.2.** hello_html_m4473d1e7.gif.

**2.3.** hello_html_m22af1f79.gif. **2.4**. hello_html_58561a87.gif.

**2.5.** hello_html_m13b41d84.gif. **2.6**. hello_html_m767e8eb7.gif.

**2.7**. hello_html_12380553.gif. **2.8.** hello_html_1c7dc743.gif.

**2.9**. hello_html_m56e50ddf.gif. **2.10**. hello_html_m534d8852.gif.

**Тест по теме «Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных»**

1. Функция Z = f(x,y) называется
   1. Переменной от нескольких функций
   2. Функцией от нескольких переменных
   3. Функцией от одной переменной
2. Если на множестве *D* задана функция двух переменных Z = f(x,y), то множество D называется
   1. Область определения функции
   2. Область значений функции
   3. Нет правильного ответа
3. Значение функции Z = f(x,y) в точке M(x0,y0) называется
   1. Общим значением
   2. Критическим значением
   3. Частным значением
4. Функцию нельзя задать
   1. Аналитически
   2. Графически
   3. Фактически
5. Геометрическим изображением функции Z = f(x,y) в прямоугольной системе координат *Oxyz* (графиком функции) является
   1. Некоторая плоскость
   2. Некоторое пространство
   3. Нет правильного ответа
6. Чтобы найти частную производную от функции Z = f(x,y) по переменной x, нужно найти производную от этой функции по x,
   1. считая, что x является постоянной.
   2. считая, что y является постоянной.
   3. считая, что x и у являются постоянными
7. Производная Z’X называется
   1. Частной производной функции по переменной у
   2. Частной производной функции по переменной х
   3. Полной производной функции
8. Производная Z’у называется
   1. Частной производной функции по переменной у
   2. Частной производной функции по переменной х
   3. Полной производной функции
9. Смешанными частными производными называются
   1. Z’’xx
   2. Z’’xy
   3. Z’’yy
10. Смешанные частные производные Z’’xy , Z’’yх
    1. Равны
    2. Не равны

**Тема 3.5 Интегральное исчисление функции нескольких действительных переменных**

**Практическое занятие № 27 Вычисление двойных интегралов**

**Цели занятия:** Научиться вычислять двойные интегралы

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами вычисления двойных интегралов**

Пример. Вычислить интеграл hello_html_7cb79880.gif, если область D ограничена линиями: y = 0, y = x2, x = 2.

y

4

D

0 2 x

hello_html_104d0153.gif=

=hello_html_6e7ace9d.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Изменить порядок интегрирования

1. hello_html_m51e574f1.gif
2. hello_html_25a70c1e.gif

Вычислить двойной интеграл по области D, определяемой условиями.

1. hello_html_m9bc7b7b.gifD: hello_html_m4a9af27d.gif
2. hello_html_m54b05575.gifD: hello_html_m760fbfef.gif

**Практическое занятие № 28 Решение задач на приложения двойных интегралов**

**Цели занятия:** Научиться решать задачи с использованием двойного интеграла

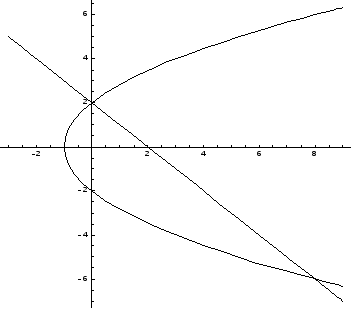
**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами решения задач с использованием двойных интегралов**

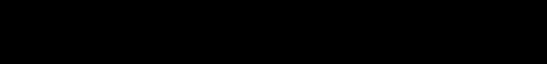
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y2 = 4x + 4;

x + y – 2 = 0.

Построим графики заданных функций:



Линии пересекаются в двух точках – (0, 2) и (8, -6). Таким образом, область интегрирования ограничена по оси Ох графиками кривых от hello_html_m42882874.gifдо *х = 2 – у*, а по оси Оу – от –6 до 2. Тогда искомая площадь равна:

S =

hello_html_78ec4784.gif

Пример. Вычислить объем, ограниченный поверхностями: x2 + y2 = 1;

x + y + z =3 и плоскостью ХОY.

Пределы интегрирования: по оси ОХ: hello_html_51614da9.gif

по оси ОY: x1 = -1; x2 = 1;

hello_html_me7796cd.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

1. Вычислить с помощью двойного интеграла площадь области D,
2. ограниченной кривой hello_html_4de03ec5.gif.
3. определяемой уравнениями .
4. Вычислить с помощью двойного интеграла объем тела V, ограниченного поверхностями. Плотность тела V считать равной единице.
5. hello_html_1c9faf7e.gif
6. hello_html_m7f21ab6c.gif
7. Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле и сделать чертеж области интегрированияhello_html_16aa015f.gif
8. Вычислить двойной интеграл по области Dhello_html_m167ff996.gif
9. Вычислить интеграл, перейдя от прямоугольных декартовых координат к полярным: hello_html_7f52c7dd.gif
10. Вычислить площадь плоских фигур, ограниченных данными линиямиhello_html_5f031309.gif
11. Вычислить интеграл http://lseti.ru/krainte/pic/4dbi11.gif. Область интегрирования *R* ограничена графиками функций http://lseti.ru/krainte/pic/4dbi12.gif.
12. Вычислить интеграл http://lseti.ru/krainte/pic/4dbi17.gif[.](http://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Flseti.ru%2Fkrainte%2Fintezad55.html) Область интегрирования *R* ограничена прямыми http://lseti.ru/krainte/pic/4dbi18.gif.

[Найти интеграл](http://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Flseti.ru%2Fkrainte%2Fintezad56.html) http://lseti.ru/krainte/pic/4dbi26.gif[,](http://infourok.ru/go.html?href=http%3A%2F%2Flseti.ru%2Fkrainte%2Fintezad56.html) где область *R* представляет собой сегмент окружности. Границы сегмента заданы уравнениями

**Тема 3.6 Обыкновенные дифференциальные уравнения**

**Практическое занятие № 29-30 Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка с разделяющимися переменными. Решение однородных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Решение линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка.**

**Цели занятия:** Научиться решать дифференциальные уравнения 1-го порядка

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами решения дифференциальных уравнений 1-го порядка**

Пример. Решить дифференциальное уравнение http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image031.gif

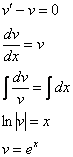
Выполним замену http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image034_0000.gif, тогда производная равна:http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image040.gif.

Подставляем http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image034_0001.gif и http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image040_0000.gif в исходное уравнение http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image031_0000.gif:

получаем http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image043.gif.

Сгруппируем члены в левой части и вынесем за скобки, например V, получимhttp://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image047.gif. Выражение в скобках приравняем к нулю: http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image049.gif.

Это простейшее уравнение с разделяющимися переменными, решаем его.



Функция http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image038_0001.gif найдена. Обратите внимание, что константу http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image062.gif на данном этапе мы не приписываем.

Далее подставляем найденную функцию http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image064.gif в оставшуюся часть уравнения http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image054_0000.gif: http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image067.gif

http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image072.gif  
Функция http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image036_0001.gif найдена. А вот здесь уже добавляем константу http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image062_0000.gif.http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image070.gif  
Вспоминаем, с чего всё начиналось: http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image034_0002.gif.   
Обе функции найдены:   
http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image064_0000.gif   
http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image076.gif

Записываем общее решение:  
http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image078.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
2. hello_html_m4e280306.gif
3. hello_html_4c3fa02b.gif
4. Найти общий интеграл дифференциального уравнения
5. hello_html_m47668cf7.gif
6. hello_html_m6663659b.gif
7. Найти решение задачи Коши
8. hello_html_m9619ca8.gif
9. hello_html_m17f10e01.gif

4. Решить дифференциальные уравнения:

1. http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image022.gif
2. Найти частное решение дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image073.gif, удовлетворяющее начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/differencialnye_uravnenija_primery_reshenii_clip_image075.gif
3. http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image092.gif
4. http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image129.gif
5. Найти частное решение дифференциального уравнения http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image131.gif, удовлетворяющее начальному условию http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image133.gif
6. Найти решение задачи Коши для данного дифференциального уравнения  
   http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image172.gif, http://www.mathprofi.ru/g/lineinye_differencialnye_uravnenija_clip_image174.gif

**Практическое занятие № 31-32 Решение линейных однородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Решение дифференциальных уравнений, допускающих понижение степеней**

**Цели занятия:** Научиться решать линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка**

Пример. Решить уравнение hello_html_m2eaf383d.gif.

Составим характеристическое уравнение: hello_html_m461219c3.gif

hello_html_m65476468.gif

hello_html_3256610b.gif

Общее решение имеет вид: hello_html_m2976dcd4.gif

Пример. Решить уравнение hello_html_495282a9.gif

Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция hello_html_67a0044b.gif

hello_html_7ce0b9e0.gif

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать:

hello_html_m1685ed98.gif

Общее решение имеет вид: hello_html_3c01e03d.gif

hello_html_m51a76fe0.gif

hello_html_63159397.gif

hello_html_14d3383e.gif

Окончательно: hello_html_6f978307.gif

Пример. Решить уравнение hello_html_7aa904c7.gif

Характеристическое уравнение: hello_html_m7a73ce67.gif

Общее решение: hello_html_m22d9943b.gif

Пример. Решить уравнение hello_html_m5053b365.gif

Характеристическое уравнение: hello_html_m4b86a1ba.gif

hello_html_m189079ac.gif

Общее решениhello_html_6230cde.gifе:

Пример. Решить уравнение hello_html_m185c3eac.gif.

Решим соответствующее однородное уравнение: hello_html_m34b31e9a.gif

hello_html_m3452bd90.gif

hello_html_m4689ce33.gif

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

hello_html_mab66120.gif

Частное решение ищем в виде: hello_html_1a1f44a2.gif, где hello_html_7cba8f24.gif

Т.е. hello_html_7d1f6e32.gif

Теперь определим неизвестные коэффициенты *А* и *В*.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение.

hello_html_m2b83b77f.gif

hello_html_m1b71ada6.gif

Итого, частное решение: hello_html_m3f20ed1e.gif

Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения:

hello_html_2aec448b.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

Решить дифференциальные уравнения

1. hello_html_2184e379.gifhello_html_m20f888ce.gif;
2. hello_html_4f742878.gif;
3. hello_html_14b85157.gif;
4. hello_html_m207aacb3.gif

**Практическое занятие № 33 Контрольная работа № 4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений**

**Цели занятия:** Проверить умение студентов решать дифференциальные уравнения

**Ход занятия:** Решить предложенные задачи согласно своему варианту.

**Вариант № 1**

1. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

*(2x+1)dy+y2dx=0 y(4)=1*

1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

*xy’ - y=x3*

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

*у″-2у′-3у=0 у(0)=1, у′(0)=1*

1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: *у″-у′-6у=2*

**Вариант № 2**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

*еу(x2+1)dy-2х(1+еу)dx=0*

1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

*xy’ + y=3 у(1)=0*

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

*у″-4у′+3у=0 у(0)=1, у′(0)=0*

1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: *у″-2у′=2ех*

**Вариант № 3**

1. Найти частное решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

*(1-x2)dy+хydx=0 y(0)=4*

1. Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

*y’=2х-2хy*

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

*у″+2у′+у=0 у(0)=1, у′(0)=0*

1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: *у″-у′=4+х*

**Вариант № 4**

1. Найти общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными:

*хуdх+(х+1)dу=0*

1. Найти частное решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

*xy’ - y=-х у(1)=0*

1. Найти частное решение линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка:

*у″+2у′-3у=0 у(0)=1, у′(0)=1*

1. Найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка: *у″-2у′-3у=е4х*

**Численное интегрирование дифференциальных уравнений. Метод Эйлера.**

Дифференциальное уравнение определяет на плоскости так называемое поле направлений, т.е. в каждой точке плоскости, в которой существует функция f(x,y), задает направление интегральной кривой уравнения, проходящей через эту точку. Пусть требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение уравнения , удовлетворяющее начальному условию у(х0)=у0. Разделим отрезок на n равных частей и положим  шаг изменения аргумента. Допустим, что внутри элементарного промежутка от х0 до x0+h функция у̕ сохраняет постоянное значение f(x0,y0). Тогда .где у1 - значение искомой функции , соответствующее значению . Из этого получаем . Повторяя эту операцию , получим последовательные значения функции: .

Таким образом , можно приближенно построить интегральную кривую в виде ломаной с вершинами , где .

Этот метод называется методом ломаных Эйлера, или просто метод Эйлера.

***Пример 1***

Используя метод Эйлера, найти значение функции у, определяемой дифференциальным уравнением , при начальном условии у(0)=1, шаг h=0,1. Ограничиться нахождением первых четырех значений у.

Найдем последовательные значения аргумента : х0=0; х1=0,1; х2=0,2; х3=0,3.

Вычислим соответствующие значения искомой функции:



;

;



Получаем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| у | 1 | 1,1 | 1,18 | 1,25 | 1,31 |

***Пример 2***

Методом Эйлера найти четыре значения функции у, определяемой уравнением , при начальном условии у(0)=1,полагая h=0,1.

Значения аргумента х0=0; х1=0,1; х3=0,2; х3=0,3.

Найдем соответствующие значения у:

;

;

;

.

Получаем таблицу:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 |
| у | 1 | 1,1 | 1,22 | 1,36 | 1,52 |

Задания для самостоятельного решения:

1. Методом Эйлера найти три значения функции у, определяемой уравнением , при начальном условии у(0)=1, полагая h=0,1.
2. Методом Эйлера найти четыре значения функции у, определяемой уравнением , при начальном условии у(0)=0, полагая h=0,1.
3. Методом Эйлера найти численное решение уравнения  при начальном условии у(2)=4, полагая h=0,1(четыре значения).

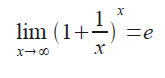
**Тест по разделу «Основы математического анализа»**

* + 1. Укажите число экстремумов для функции, производная которой равна y'=x- 4

a. 0

b. 2

c. 1

2. .Как называется предел 

a. Первый замечательный предел

b. Второй замечательный предел

c. Полезный предел

3. Производная функции y= sin x равна

a. cos x

b. -cos x

c. sin x

4. Производная функции y= cos x равна

a. sin x

b. -sin x

c. cos x

5. Если f(-x)= f(x), то функция f(x)

a. общего вида

b. нечетная

c. четная

6. Если f(-x)= -f(x), то функция f(x)

a. общего вида

b. нечетная

c. четная

7. Если производная функции на некотором интервале положительна, то функция на этом интервале

a. постоянна

b. убывает

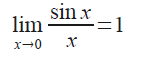
c. возрастает

8. Если производная функции на некотором интервале отрицательна, то функция на этом интервале

a. постоянна

b. убывает

c. возрастает

9. Как называется предел 

a. Первый замечательный предел

b. Второй замечательный предел

c. Полезный предел

10. Если предел функции при х стремящемся к бесконечности равен некоторому числу b, то прямая y=b является для графика функции

a. вертикальной асимптотой

b. наклонной асимптотой

c. горизонтальной асимптотой

11. Если первая производная функции в некоторой точке х0 равна нулю, то эта точка может являться

a. точкой экстремума

b. точкой перегиба

c. точкой разрыва

12.Чему равна производная от постоянного числа

a. самому числу

b. нулю

c. бесконечности

13. С помощью какой производной можно найти точки перегиба

a. третьей

b. второй

c. первой

14. Как называется функция, производная которой равна данной функции?

a) Подынтегральная функция

b) Первообразная функция

c) Неопределенный интеграл

15. Какое из утверждений верно? Определенный интеграл – это:

a) Функция от х

b) Число

c) Фукнция от f(x)

16. Сколько начальных условий необходимо задать для определения

постоянных величин C 1, C2 в общем решении дифференциального

уравнения второго порядка?

a) 1

b) 0

c) 2

17. Чем определяется порядок дифференциального уравнения?

a) Высшим порядком производной, входящей в уравнение

b) Максимальной степенью переменной х

c) Количеством переменных величин в правой части

18. Сколько произвольных постоянных величин содержит решение

дифференциального уравнения 2-го порядка, если начальные условия не

заданы?

a) 0

b) 1

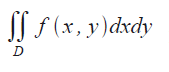
c) 2

19.Вертикальной асимптотой функции у=(х-1)/(x-7) является прямая

a) у = 0

b) х = 7

c) х = 1

20. Интеграл вида называется

a) двойным

b) повторным

c) двоичным

**Раздел 4. Основы теории комплексных чисел**

**Практическое занятие № 34 Действия над комплексными числами в алгебраической и тригонометрической формах**

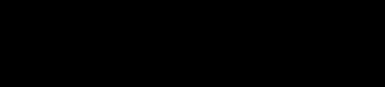
**Цели занятия:** Научиться выполнять действия над комплексными числами

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами выполнения действий над комплексными числами**

Пример. Даны два комплексных числа hello_html_m324146ca.gif. Требуется а) найти значение выражения в алгебраической форме, б) для числа hello_html_38a986ce.gifнайти тригонометрическую форму, найти *z20*, найти корни уравнения hello_html_m1f09c1fc.gif

1. Очевидно, справедливо следующее преобразование:



Далее производим деление двух комплексных чисел:

hello_html_29566f30.gif

Получаем значение заданного выражения: 16(-*i*)4 = 16*i*4 =16.

б) Число hello_html_38a986ce.gifпредставим в виде hello_html_m6b53fe.gif, где

hello_html_3427b337.gif

Тогда hello_html_m1f553946.gif.

Для нахождения hello_html_m2d39320e.gifвоспльзуемся формулой Муавра.

hello_html_793e40b1.gif

hello_html_28e88477.gif

Если hello_html_53d6e20.gif, то hello_html_7505b4d2.gif

hello_html_72febdea.gif

**2. Выполнить следующие упражнения**

**1**. Изобразите геометрически комплексные числа и им сопряженные:

2; *-i*; -2; 3 – 2*i*; 1 + 2*i*; - 1 – *i*.

**2**. а) Найдите сумму и произведение комплексных чисел hello_html_6e08f4ce.gifи hello_html_m23639d6e.gifесли:

1) hello_html_m27ca9871.gif

2) hello_html_4e9273d4.gif

б) Найдите разность и частное комплексных чисел hello_html_52c84bb4.gifи hello_html_m7f14a32e.gif, если:

1. hello_html_m5c534f45.gif
2. hello_html_m403d0239.gif

**3.**Найдите мнимую часть Z, если:

1) hello_html_5566af30.gif

1. hello_html_9f72de6.gif
2. hello_html_m6760abe9.gif

**4.**Выполните действия:

1. hello_html_45bfca70.gif
2. hello_html_20c14377.gif
3. hello_html_m69746f36.gif
4. hello_html_634c3d4a.gif

**Практическое занятие № 35 Переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно**

**Цели занятия:** Научиться выполнять переход от алгебраической формы к тригонометрической и обратно

**Ход занятия:**

**1. Ознакомиться с примерами перехода комплексных чисел от алгебраической формы к тригонометрической**

Заданы комплексные числа: а)hello_html_m42d8b6f0.gif; б) hello_html_m7d28e35e.gif; в) hello_html_m318e62bb.gif; г) hello_html_19984535.gif; д) hello_html_29b80921.gif; е) hello_html_m3a2786e8.gif.

Представить *z*1, *z*2, *z*3 в тригонометрической, а *z*4, *z*5, *z*6 – в показательной форме и изобразить точками на комплексной площади.

Решение:

а) имеем (см. рис. 1.2) r = 1; j = p, hello_html_1f13c500.gif(1.1)  
б) имеем (см. рис. 1.2) r = 2; hello_html_mc631cbf.gif, hello_html_m59c2ef3d.gif;

в) имеем hello_html_3c20c9d2.gif; согласно рис. 1.2 точка *z*3 принадлежит первому квадранту, поэтому hello_html_7993c5d3.gif, так что hello_html_m134141e5.gif(1.2);

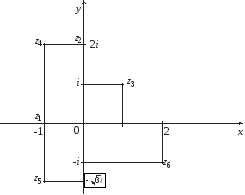


рис. 1.2

г) имеем hello_html_5d032fb5.gifсогласно рис. 1.2, точка *z*4 принадлежит второму квадранту, поэтому hello_html_54f9dded.gifтак что hello_html_m249ab53e.gif;

д) имеет hello_html_1d50afe4.gif, hello_html_m51f76da0.gif, согласно рис. 1.2, точка *z*5 принадлежит третьему квадранту, поэтому hello_html_1c0e0a18.gif, так что hello_html_m2e2fcbfa.gif(1.3);

е) имеем hello_html_m7e620aff.gif, согласно рис. 1.2, точка *z*6 принадлежит четвертому квадранту, поэтому hello_html_286816d.gif.

**2. Выполнить следующие упражнения**

. Представьте в тригонометрической и показательной формах комплексные числа:

1) hello_html_m56cf26d2.gif,

2) hello_html_2b2910db.gif,

3) hello_html_m9af6845.gif,

**8**. Записать комплексное число в алгебраической и в тригонометрической формах:

1) hello_html_m2def7cd3.gif,

2) hello_html_m17bdfaaf.gif,

3) hello_html_m1de466cf.gif,

**9**. Представить в тригонометрической форме комплексное число Z:

1) hello_html_m36961a14.gif,

2) hello_html_5c2c3733.gif.

**10** . Записать комплексное число Z в алгебраической форме:

1) hello_html_500b3fda.gif,

2) hello_html_m61049055.gif,

число Z в тригонометрической форме:

1) hello_html_m32af5fa4.gif,

2) hello_html_29180c50.gif,

3) hello_html_m75abaafd.gif,

4) hello_html_7d2deae2.gif,

**Тест по разделу «Основы теории комплексных чисел»**

1. Что представляет собой мнимая единица ?

a) корень квадратный из -1

b) -1

c) 1

2. Представить число Z = -3 в виде комплексного числа

a) Z=3i

b) Z=-3+i0

c) Z=-3i

3. Дано комплексное число Z= -3+2i. Найти координаты точки на

плоскости хоу ему соответсвующие

a) (3;2)

b) (-3;2)

c) (-3;-2)





**Самостоятельная работа: «Степенные и функциональные ряды»**

**Вариант 1**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 2**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 3**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 4**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 5**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 6**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 7**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 8**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 9**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Вариант 10**

1.Написать первые пять членов ряда по заданному общему члену:



2.Найти формулу общего члена ряда:



3.Выяснить сходимость (расходимость) ряда с помощью необходимого признака



4.Используя достаточные признаки, исследовать на сходимость ряды:



5.Используя признак Лейбница, исследовать на сходимость знакопеременного ряда:



6.Исследовать абсолютную и условную сходимость ряда:



**Список литературы**

1. Шипачев В. С., Высшая математика / Шипачев В. С.— ООО "Научно-издательский центр ИНФРА-М", 2018. — 312 с.— Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Знания» : [Электронный ресурс]. — URL: https://znanium.com/catalog/product/945790
2. Растопчина, О.М. Высшая математика : учебное пособие / О.М. Растопчина. — Москва : МПГУ, 2018. — 150 с. — ISBN 978-5-4263-0594-6. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/112525
3. Бардушкин В. В., Прокофьев А. А., Математика. Элементы высшей математики / Бардушкин В. В., Прокофьев А. А. — ООО "КУРС", 2017. — 140 с.— Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Знания» : [Электронный ресурс]. — URL: https://znanium.com/catalog/product/615108
4. Лурье И. Г., Фунтикова Т.П. Высшая математика. Практикум / Лурье И. Г., Фунтикова Т.П. – Вузовский учебник, 2017. – 312 с. : ил. – [Электронный ресурс]. – URL: https://znanium.com/catalog/product/561293
5. Чудовская, Л.А. Высшая математика. Дифференциальное исчисление : учебное пособие / Л.А. Чудовская, М.М. Галилеев. — Санкт-Петербург : СПбГЛТУ, 2017. — 80 с. — ISBN 978-5-9239-0935-7. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/92875
6. Туганбаев, А.А. Высшая математика. Функции нескольких переменных и несобственные интегралы. Теория и задачи : учебник / А.А. Туганбаев. — Москва : ФЛИНТА, 2019. — 120 с. — ISBN 978-5-9765-4253-2. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/123654