

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (ФИЛИАЛ)**

**ФЕДЕРАЛЬНОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО**

**ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**В Г. ТАГАНРОГЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ**

**ПИ (филиал) ДГТУ в г. Таганроге**

УТВЕРЖДАЮ

Директор

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ А.К. Исаев

«\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_2019 г

Рег. № \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ**

к практическим занятиям

По дисциплине: ОП.10 Численные методы

По специальности: 09.02.07«Информационные системы и программирование»

Таганрог

2020**Лист согласования**

Учебно-методическое пособие по учебные дисциплины ***Численные методы*** разработана на основе Федерального государственного образовательного стандарта (далее – ФГОС) для специальности среднего профессионального образования (далее – СПО) 09.02.07 «Информационные системы и программирование».

**Разработчик(и):**

Преподаватель Т.М. Марданова

Методические указания рассмотрены и одобрены на заседании цикловой методической комиссии специальности 09.02.05Прикладная информатика (по отраслям)

Протокол № 7 от «04» февраля 2020г

Председатель цикловой методической комиссии О.В. Андриян

**Рецензенты:**

ЧОУ ВО «ТИУиЭ» начальник информационно-аналитического управления, к.т.н., доцент О.И. Овчаренко

АО «Красный гидропресс»зам. начальника отдела ИТ С.С. Пирожков

**Согласовано:**

Заведующий УМО

Т. В. Воловская

**Введение**

В учебно-методическом пособии к практикуму по курсу «Численные методы» изложены сведения, необходимые для успешного выполнения практических занятий по данному курсу. Описан процесс работы с инструментарием, применяемым на практических занятиях, представлен ряд типичных задач и подходы к их решению. Практические занятия посвящены углубленному знакомству обучающихся с вычислением погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами; решением алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций; решением алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных; решением систем линейных уравнений приближёнными методами; составлением интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, нахождением интерполяционных многочленов сплайнами; вычислением интегралов методами численного интегрирования; применением численных методов для решения дифференциальных уравнений.

Цель настоящего пособия – помочь обучающимся при выполнении практических работ, выполняемых для закрепления знаний по теоретическим основам и получения практических навыков работы на компьютерах.

Обучающийся должен знать: методы хранения чисел в памяти электронно-вычислительной машины (далее – ЭВМ) и действия над ними, оценку точности вычислений; методы решения основных математических задач – интегрирования, дифференцирования, решения линейных и трансцендентных уравнений и систем уравнений с помощью ЭВМ.

Обучающийся должен уметь: использовать основные численные методы решения математических задач; выбирать оптимальный численный метод для решения поставленной задачи; давать математические характеристики точности исходной информации и оценивать точность полученного численного решения; разрабатывать алгоритмы и программы для решения вычислительных задач, учитывая необходимую точность получаемого результата.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для обучающихся 3 курса.

**Правила выполнения практических занятий**

Практические занятия выполняются каждым обучающимся самостоятельно в полном объеме и согласно содержанию методических указаний.

Перед выполнением обучающийся должен отчитаться перед преподавателем за выполнение предыдущего занятия (сдать отчет).

Обучающийся должен на уровне понимания и воспроизведения предварительно усвоить необходимую для выполнения практических занятий теоретическую и информацию.

Обучающийся, получивший положительную оценку и сдавший отчет по предыдущему практическому занятию, допускается к выполнению следующему занятию.

Обучающийся, пропустивший практическое занятие по уважительной либо неуважительной причине, закрывает задолженность в процессе выполнения последующих практических занятий.

**Практическая работа №1.**

**Вычисление погрешностей результатов арифметических действий над приближёнными числами.**

**Цель:** получение практических навыков вычисления погрешностей результатов арифметических действий

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

**Краткая теория**

Приближенным числом a называется число, незначительно отличающееся от точного числа А и заменяющее последнее в вычислениях.

Абсолютная величина разности между точным числом А и его приближенным значениям а называется абсолютной погрешностью приближенного числа а ( *a* ).

*a*  *A*  *a*

*Пример*.*A*  784 .2734 ; *a*  784 .274

 *a*  784 .2737  784 .274

 0.0003

Точное значение числа А часто бывает неизвестно, значит неизвестна абсолютная погрешность числа а, поэтому пользуются понятием границы абсолютной погрешности.

Граница абсолютной погрешности, то есть число заведомо превышающее абсолютную погрешность или в крайнем случае равное ей, называется предельной абсолютной погрешно

*а*

стью \* .

*а*

 *а* 

*А*  *а*  \*

*a*  

*a*

Значение точного числа А всегда заключено в следующих границах

 *A*  *a*  

*a*

Относительной погрешностью приближенного числа а называется отношение абсолют-

ной погрешности  *a*

к модулю точного числа А.

**   *а*

*А*

*а*

  *а* 

*А*  * а*

**  , заведомо превышающее относительную погрешность или в крайнем случае

равное ей, называется предельной относительной погрешностью ( ** \* ).

*a*

*а*

Задание 2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры а) в узком смысле 0,4357 ;

б) в широком смысле12,384.

Решение.

а) Так как все четыре цифры числа ность вычисляется по формуле



*a*

*a*  0,4357

верны в узком смысле, то абсолютная погреш-

а относительная погрешность

\*  0,5 10 *т**n*1,

** \* 

**

*a*

1

где n- количество верных значащих цифр m- старший десятичный разряд числа

* i* - цифра числа, причем **1  0

0,5 ,

10 *n*1

Значит, \*

*a*

 0,5 10 4  0,00005 ;

** \*  0.5 /4 10 41  0,000125

 0,0125 %.

б) Так как все пять цифр числа ность вычисляется по формуле

*a*

а относительная погрешность

*a*  12,384

\*



*a*

верны в широком смысле, то абсолютная погреш-

 110 *т**n*1 ,

** \* 

**

*a*

1

где n- количество верных значащих цифр m- старший десятичный разряд числа

* i* - цифра числа, причем **1  0

*a*

1 ,

10 *n*1

Следовательно, \*

*a*

 110 3  0,001; ** \*  1/11051  0,0001  0,01%.

Ответ: а) \*  0,00005 ; ** \*  0,0125 %.

*a*

*a*

б) \*  0,001; ** \*  0,01%.

*a*

**Задания**

1. Определить, какое равенство точнее.
2. Найти предельные абсолютные и относительные погрешности чисел, если они имеют только верные цифры: а) в узком смысле; б) в широком смысле.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| №1. | 1) 44  6,63; 19 / 41  0,463  2) а) 0,2387 ; б) 42,884 . | №2. | 1) 7 /15  0,467; 30  5,48;  2) а) 3,751; б) 0,537 . |
| №3. | 1) 10,5  3,24; 4 /17  0,235  2) а) 11,445; б) 2,043. | №4. | 1) 15 / 7  2,14; 10  3,16;  2) а) 2,3445 ; б) 0,745 . |
| №5. | 1) 6 / 7  0,857; 4,8  2,19;  2) а) 8,345; б) 0,288 . | №6. | 1) 12 /11  1,091; 6,8  2,61;  2) а) 12,45; б) 3,4453 . |
| №7. | 1) 15 / 7  2,14; 10  3,16;  2) а) 2,3445 ; б) 0,745 . | №8. | 1) 23 /15  1,53; 9,8  3,13;  2) а) 20,43; б) 0,576 . |
| №9. | 1) 6 /11  0,545; 83  9,11;  2) а) 41,72; б) 0,678 . | №10. | 1) 17 /19  0,895; 52  7,21;  2) а) 5,634; б) 0,0748 . |
| №11. | 1) 21 / 29  0,723; 44  6,63;  2) а) 18,357; б) 2,16. | №12. | 1) 50 /19  2,63; 27  5,19;  2) а) 0,5746 ; б) 236,58. |
| №13. | 1) 13 /17  0,764; 31  5,56;  2) а) 14,862; б) 8,73. | №14. | 1) 7 / 22  0,318; 13  3,60;  2) а) 0,3648 ; б) 36,5. |
| №15. | 1) 17 /11  1,545; 18  4,24;  2) а) 2,4516 ; б) 0,863 . | №16. | 1) 5 / 3  1,667; 38  6,16;  2) а) 62,74; б) 0,389 . |
| №17. | 1) 49 /13  3,77; 14  3,74;  2) а) 5,6432 ; б) 0,00858 . | №18. | 1) 13 / 7  1,857; 7  2,64;  2) а) 0,0384 ; б) 63,745. |
| №19. | 1) 19 /12  1,58; 12  3,46;  2) а) 12,688; б) 4,636. | №20. | 1) 51/11  4,64; 35  5,91;  2) а) 6,743; б) 0,543 . |
| №21. | 1) 18 / 7  2,57; 22  4,69;  2) а) 15,644; б) 6,125 . | №22. | 1) 19 / 9  2,11; 17  4,12;  2) а) 0,3825 ; б) 24,6. |
| №23. | 1) 16 / 7  2,28; 11  3,32;  2) а) 16,383; б) 5,734 . | №24. | 1) 20 /13  1,54; 63  7,94;  2) а) 0,573; б) 3,6761 . |
| №25. | 1) 12 / 7  1,71; 47  6,86;  2) а) 18,275; б) 0,00644 . | №26. | 1) 6 / 7  0,857; 41  6,40;  2) а) 3,425; б) 7,38. |
| №27. | 1) 23 / 9  2,56; 87  9,33;  2) а) 3,75; б) 6,8343 . | №28. | 1) 27 / 31  0,872; 42  6,48;  2) а) 3,643; б) 72,385 . |
| №29. | 1) 7 / 3  2,33; 58  7,61;  2) а) 26,3; б) 4,8556 . | №30. | 1) 14 /17  0,823; 53  7,28;  2) а) 43,813; б) 0,645. |

**Контрольные вопросы**

1. Что такое абсолютная и относительная погрешности?
2. Что такое предельная абсолютная и предельная относительная погрешности?
3. Чему равны погрешности суммы, разности, произведения, частного, степени и корня?
4. Какие вам известны правила подсчета цифр?

**Практическая работа №2.**

**Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом половинного деления и методом итераций.**

**ЦЕЛЬ:**Научиться выполнять арифметические действия с приближенными числами; вычислять погрешности полученных результатов.

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

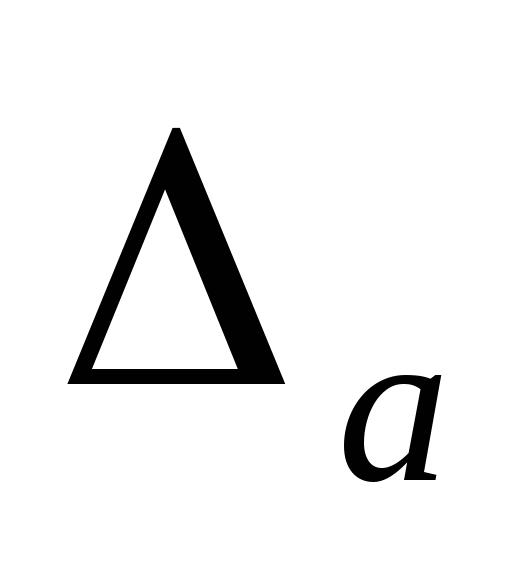
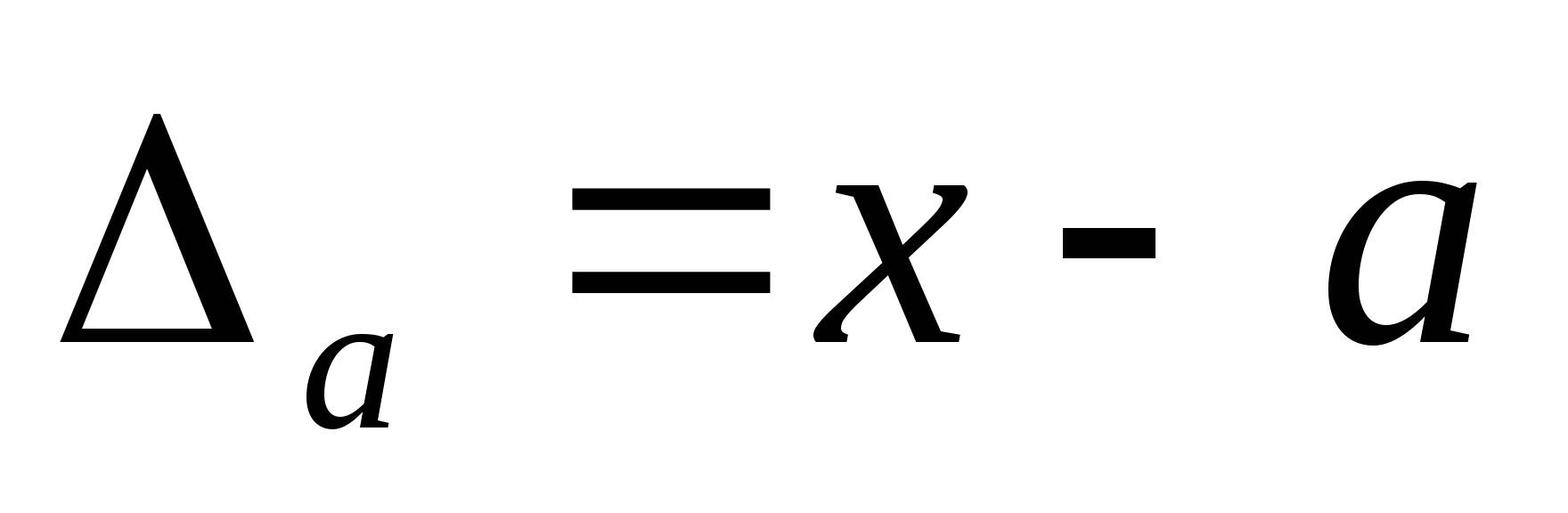
**КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:**

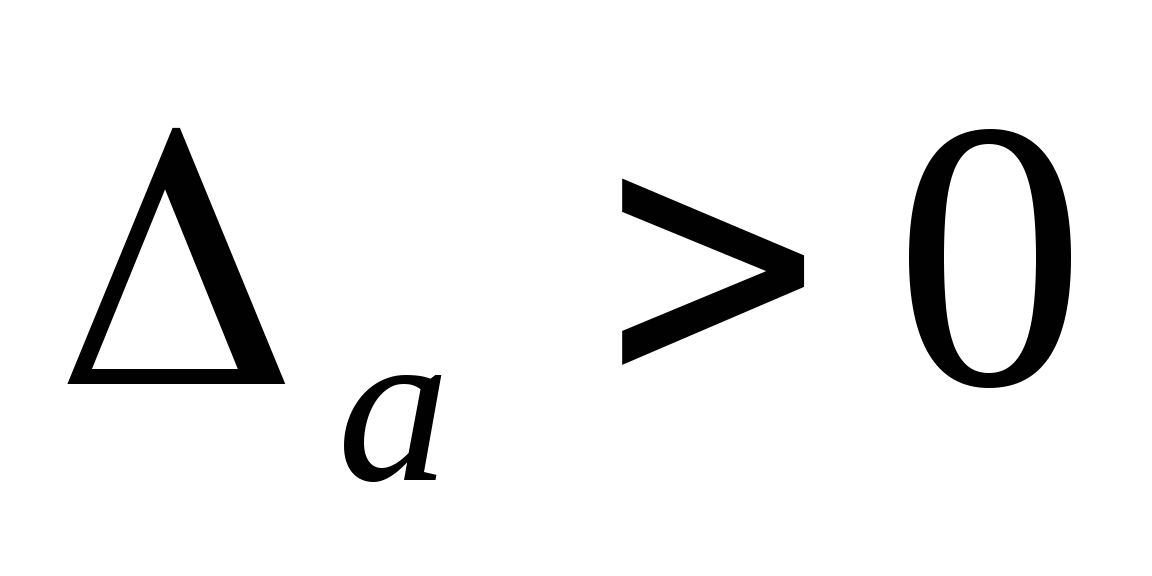
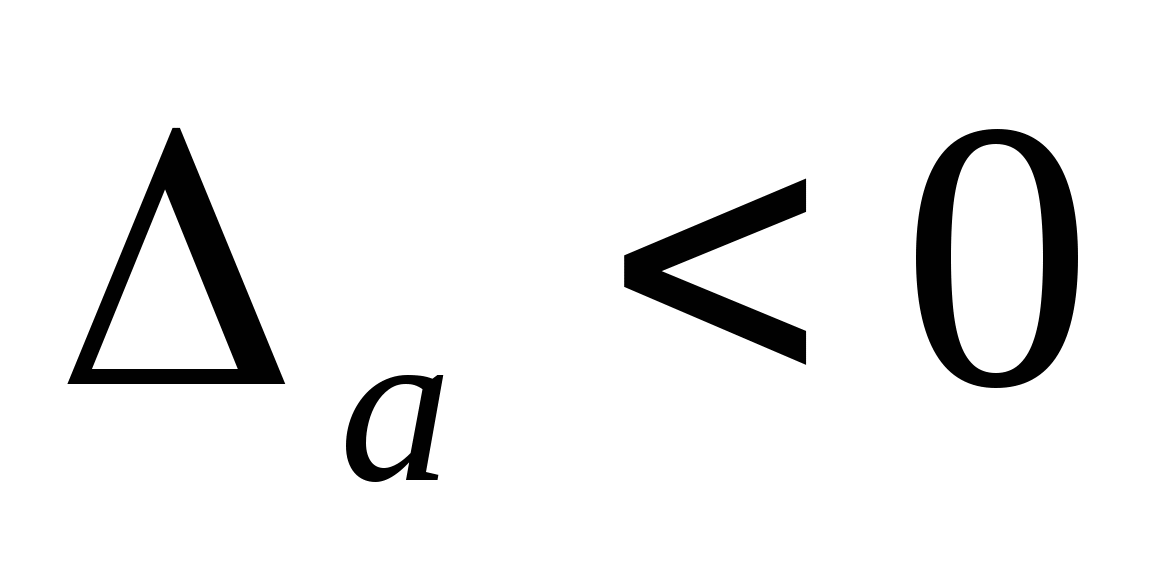
*Приближенное число* заменяет собой число точное, которое чаще всего остается неизвестным.

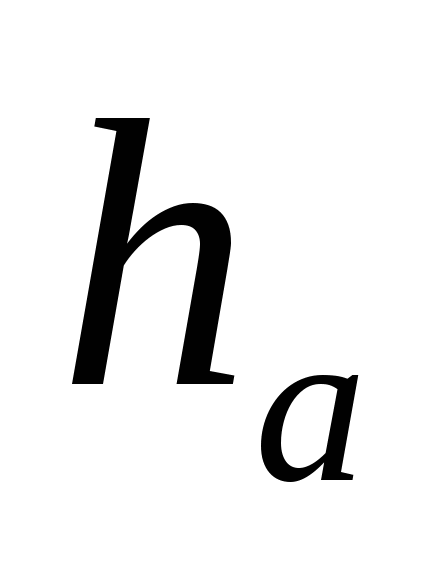
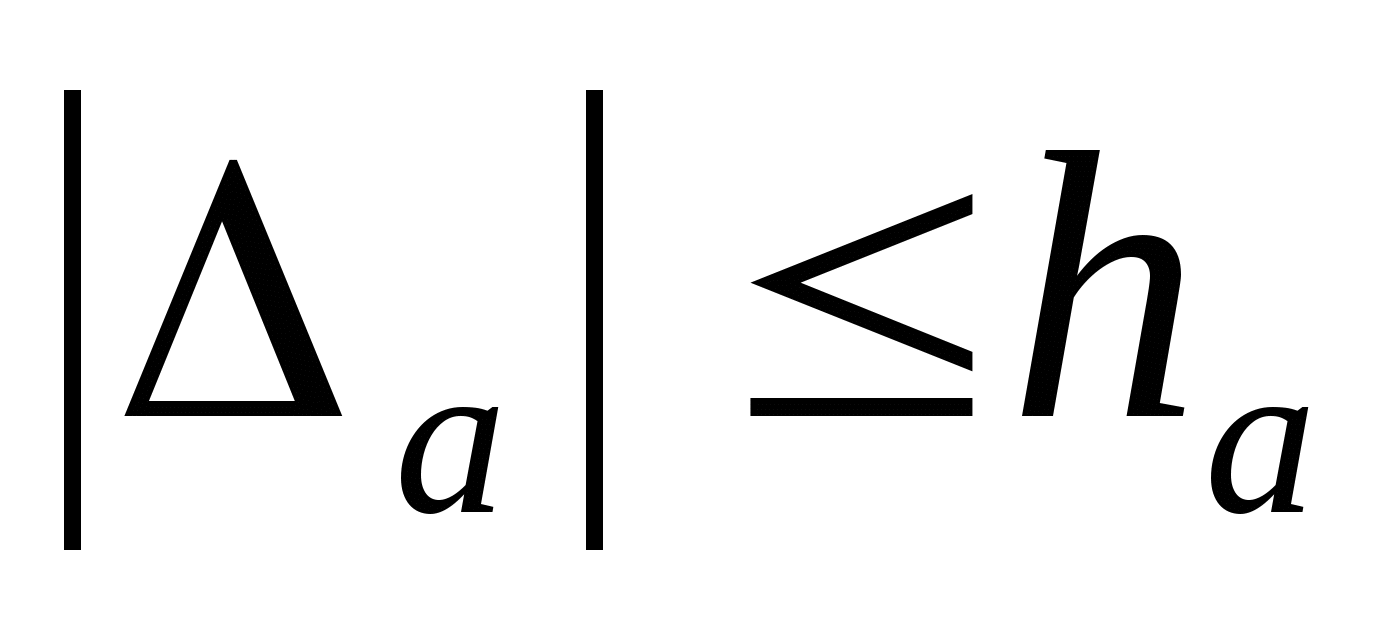
*Верной цифрой* называют такую, погрешность которой не превышает половины единицы следующего разряда.

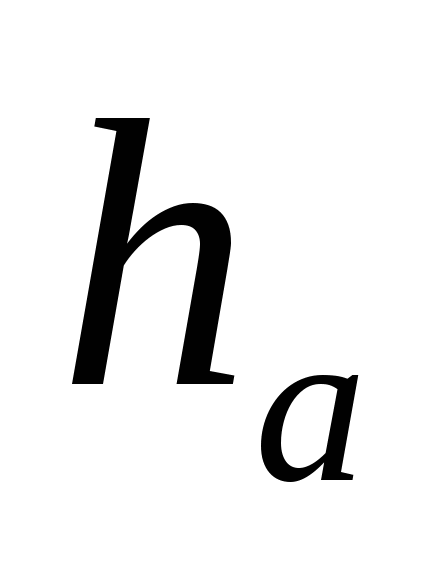
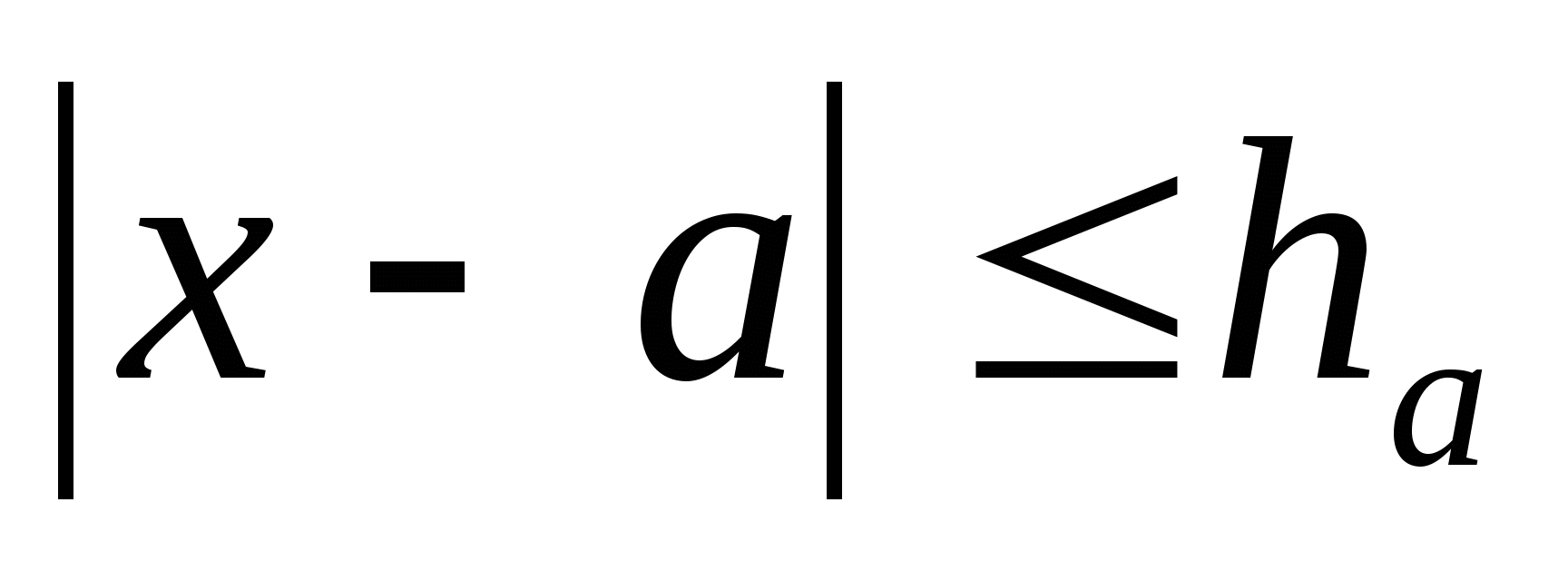
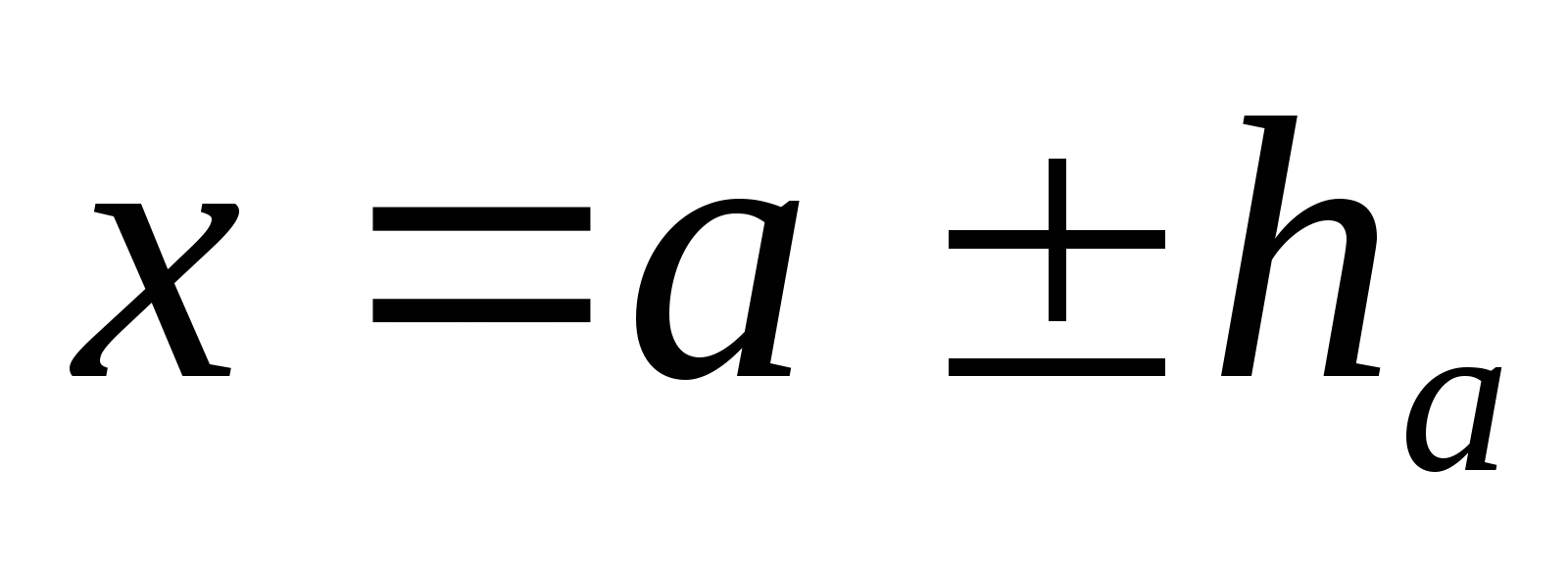
*Сомнительная цифра* – это цифра, следующая за верной.

*Значащими цифрами* данного числа называют цифры, начиная с первой слева, отличной от нуля, и кончая последней, за точность которой еще можно поручиться.

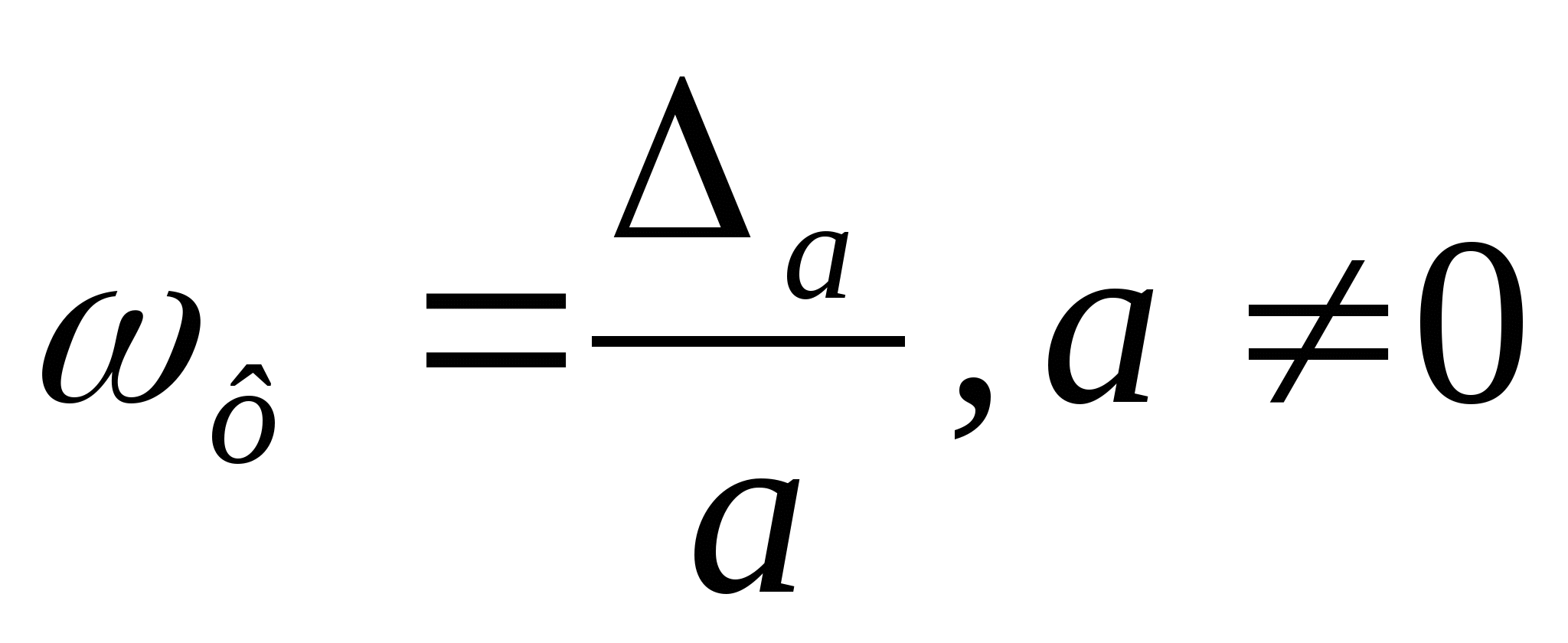
*Погрешностью  приближенного значения а числа х* называется разность , а модуль этой погрешностью называется *абсолютной погрешностью*.

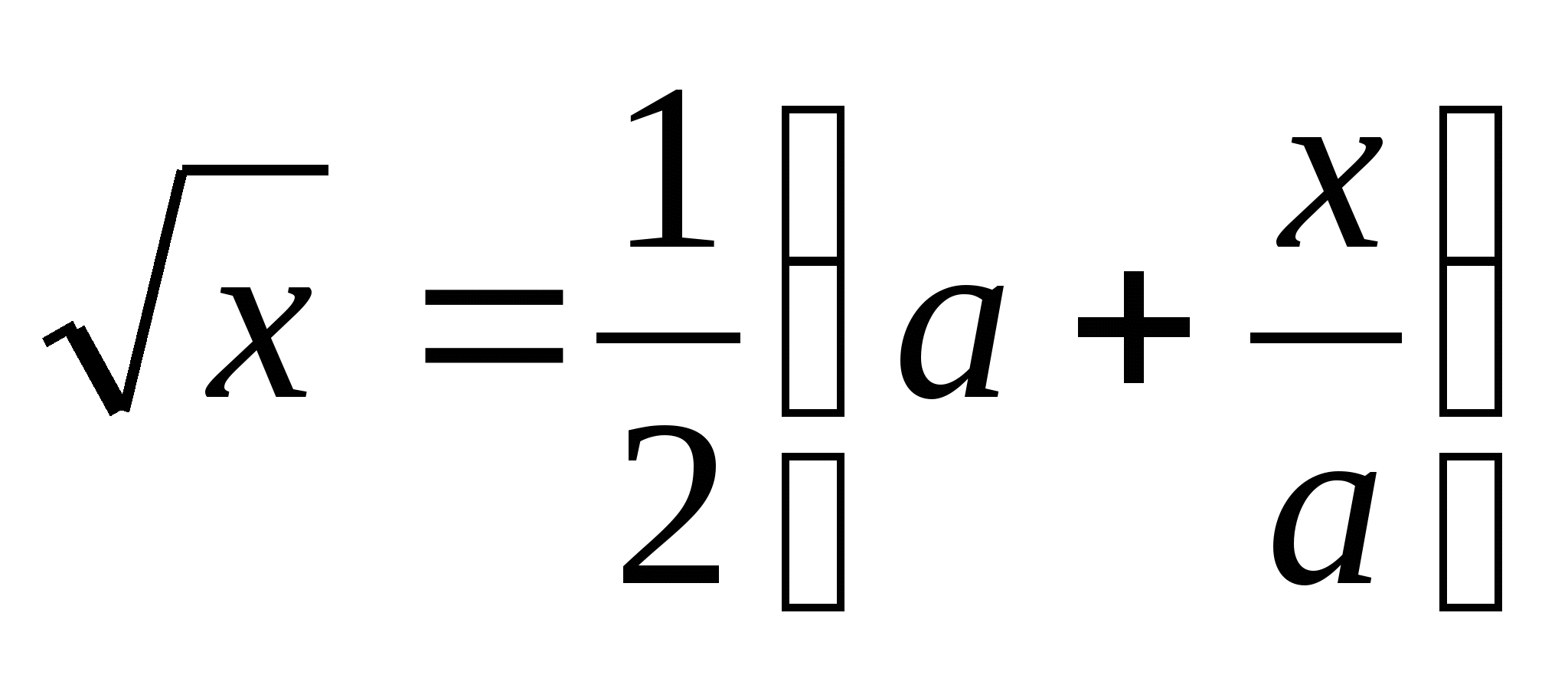
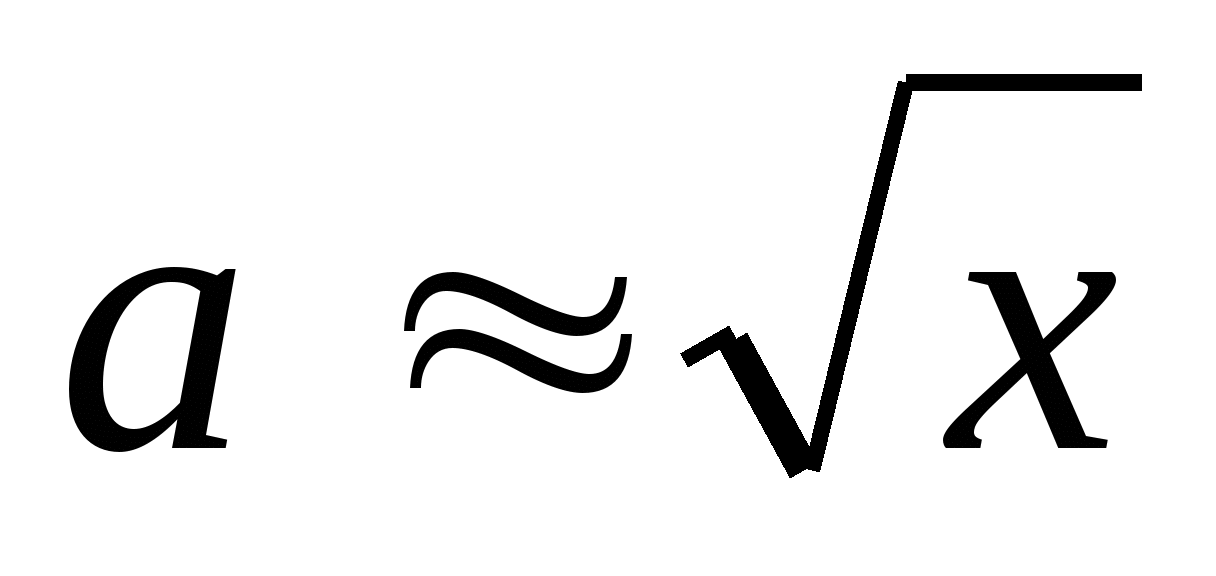
Если , то а взято с недостатком. Если , то а взято с избытком.

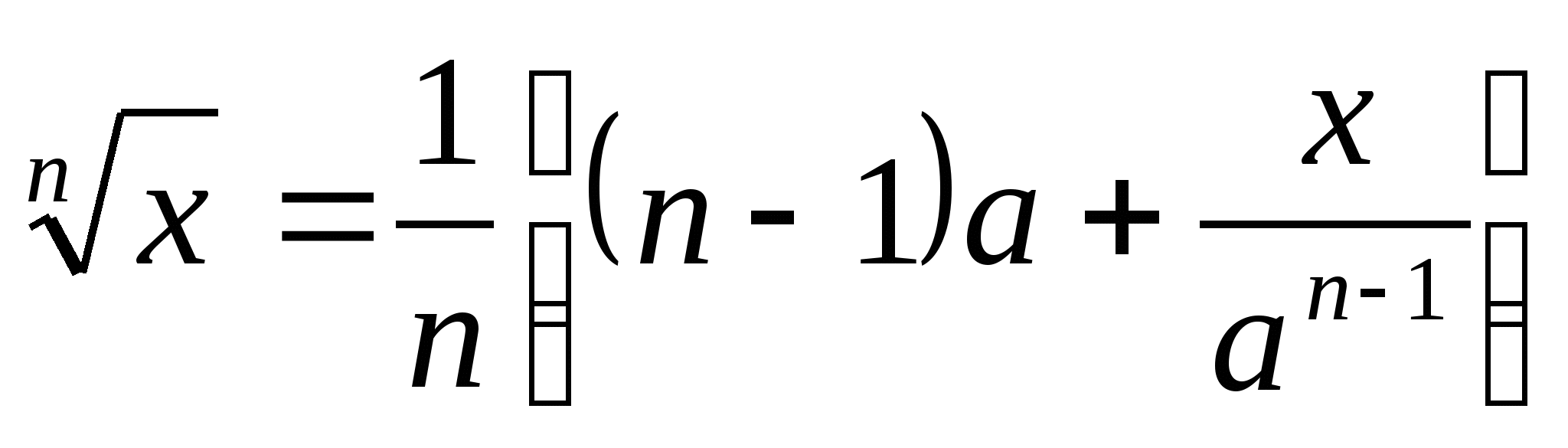
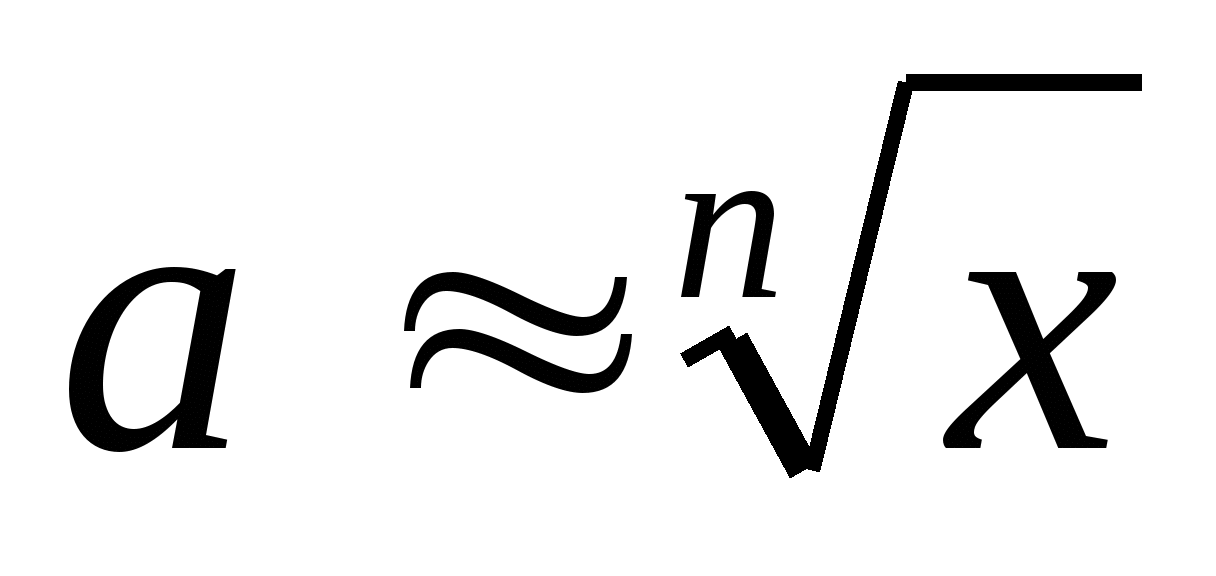
*Границей погрешности приближенного значения а числа х*называется всякое неотрицательное число , которое не меньше модуля погрешности: .

Говорят, что приближение а приближает число х с точностью до , если , , .

*Относительной погрешностью*приближенного значения а числа хназывается отношение

**.**

*Квадратный корень* из приближенного числа вычисляется по формуле: , где .

*Общая формула* для вычисления корня n-ой степени: , где .

**ЗАДАНИЯ:**

**ЗАДАНИЕ 1**Вычислить сумму с указанным числом верных десятичных и запасных знаков.

Вар.

Сумма

Верн. дес. зн.

Зап. зн.

Вар.

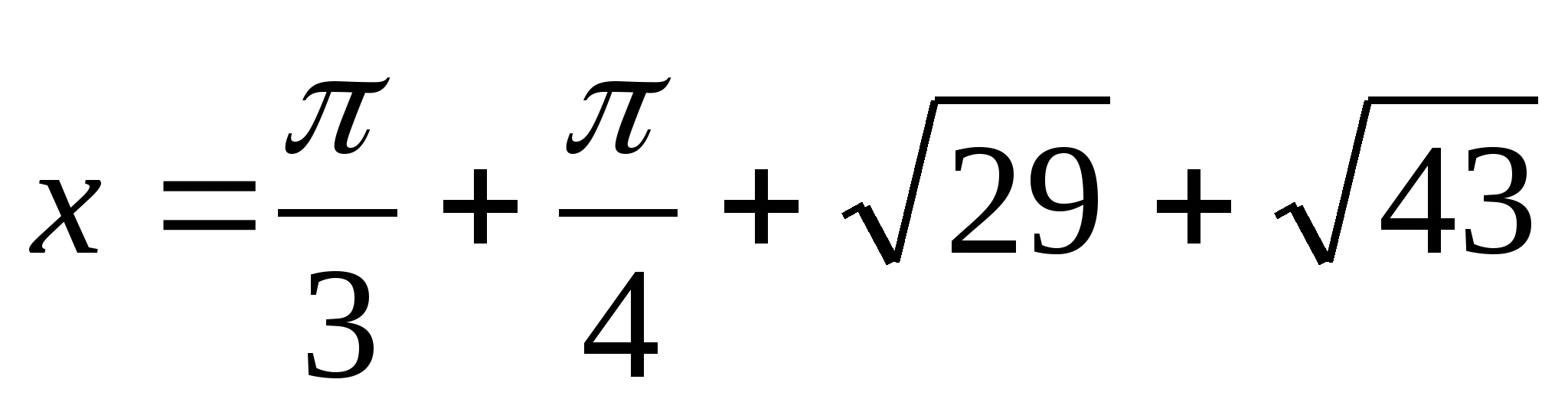
Сумма

Верн. десят. знаков

Зап.

знаков

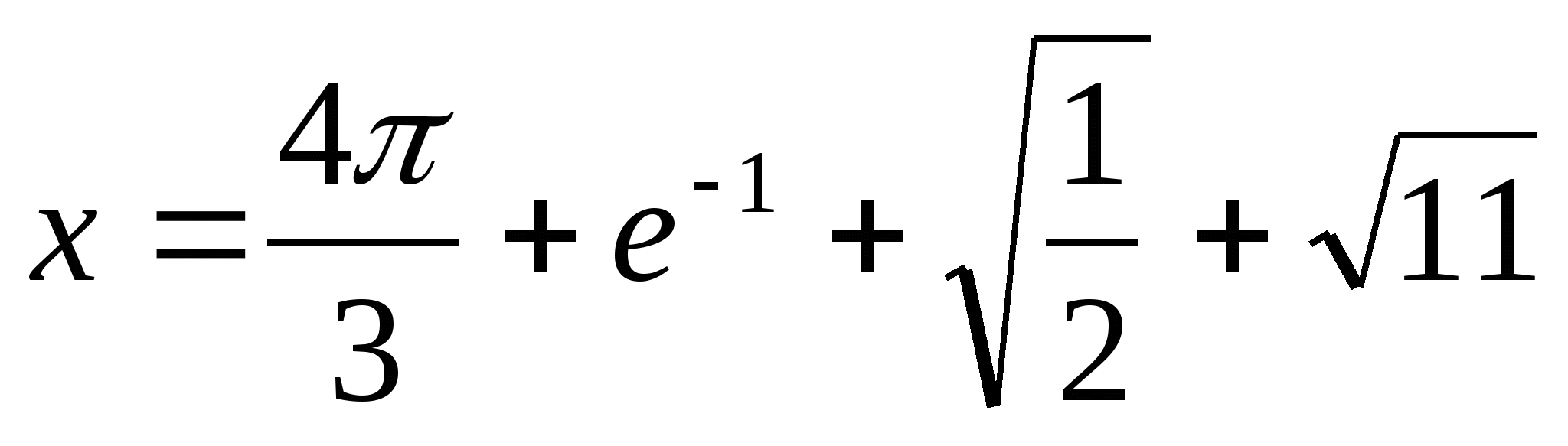
I



2

1, 2

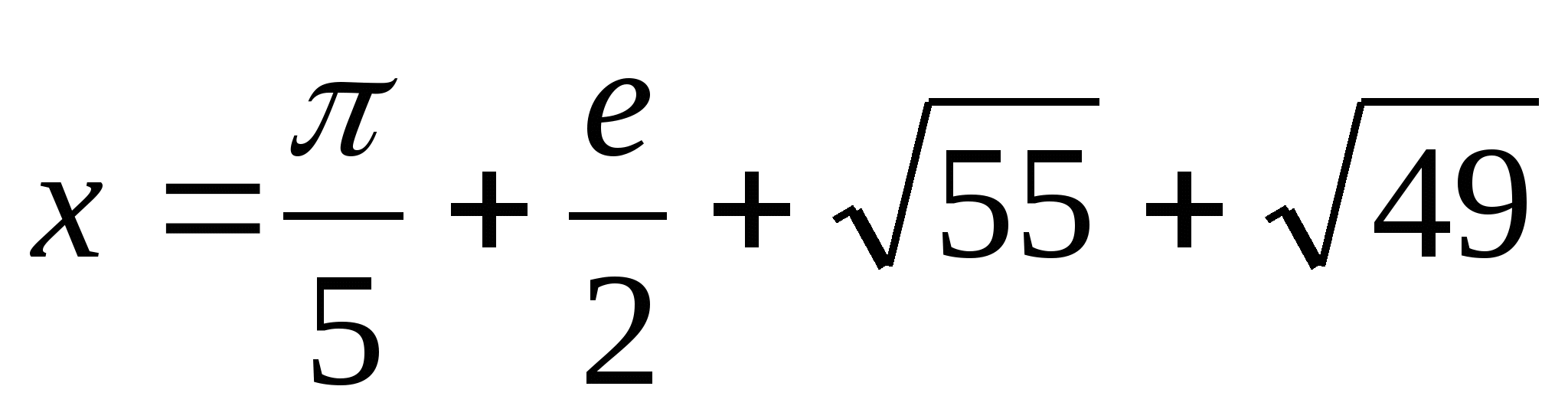
VI



2

1, 2

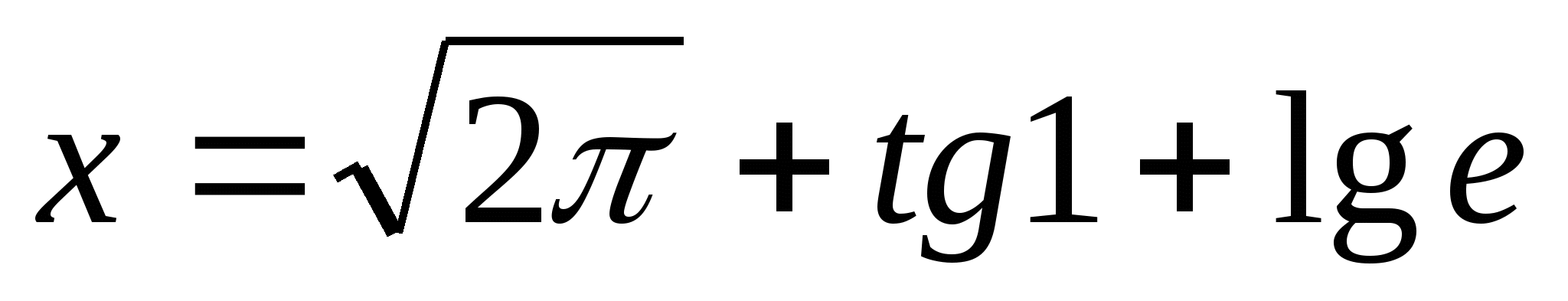
II



2

2, 3

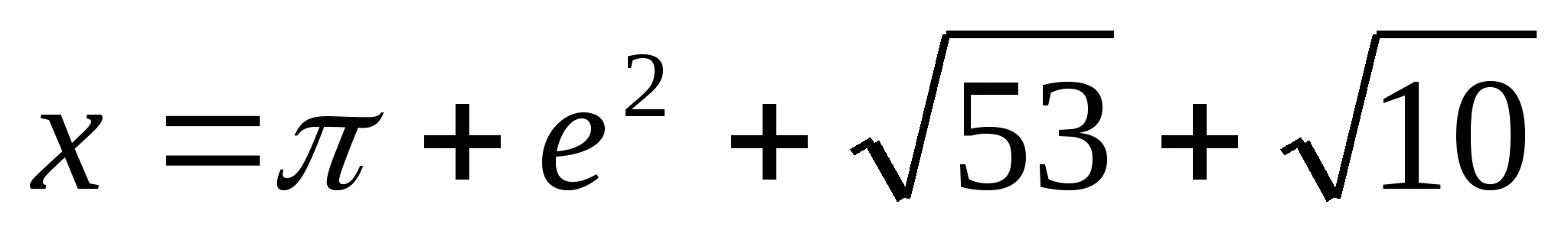
VII



2

1, 2

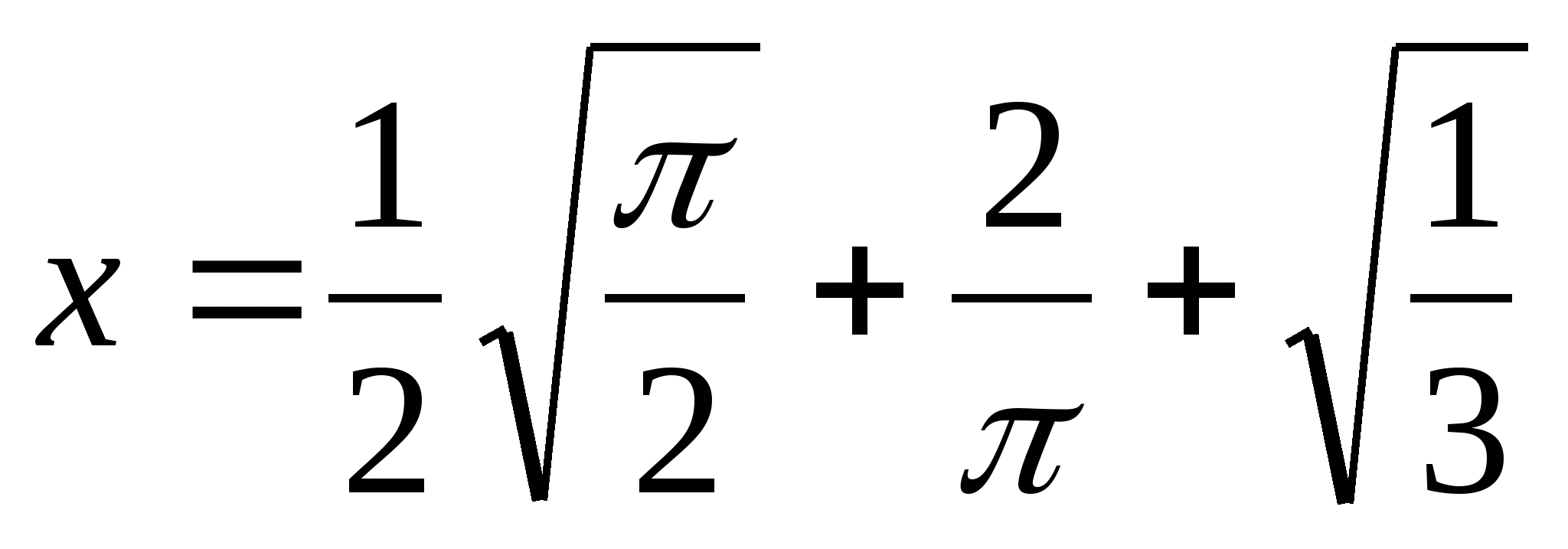
III



4

1, 2

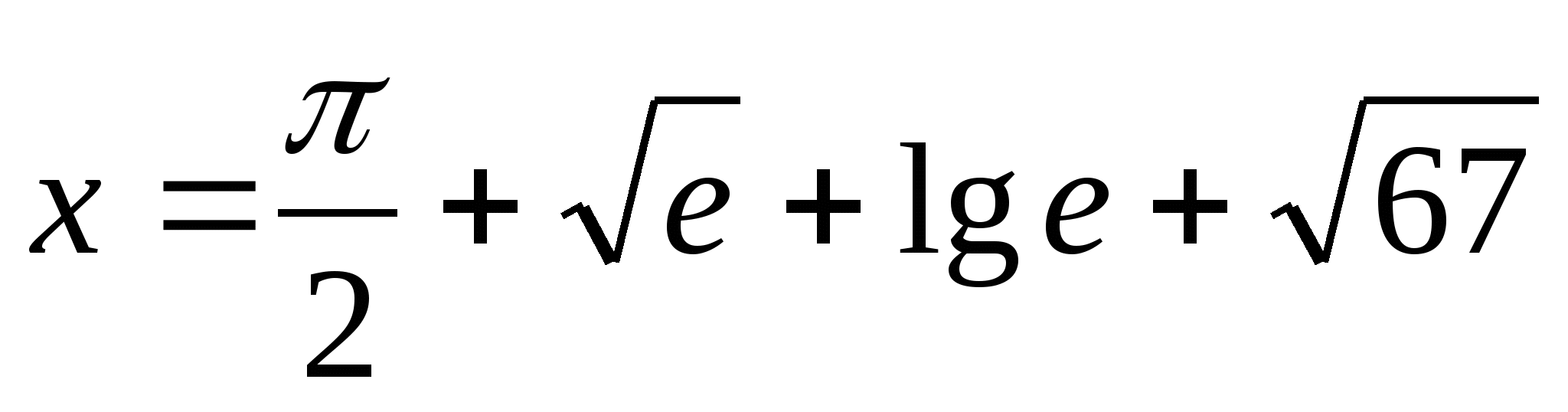
VIII



3

1, 2

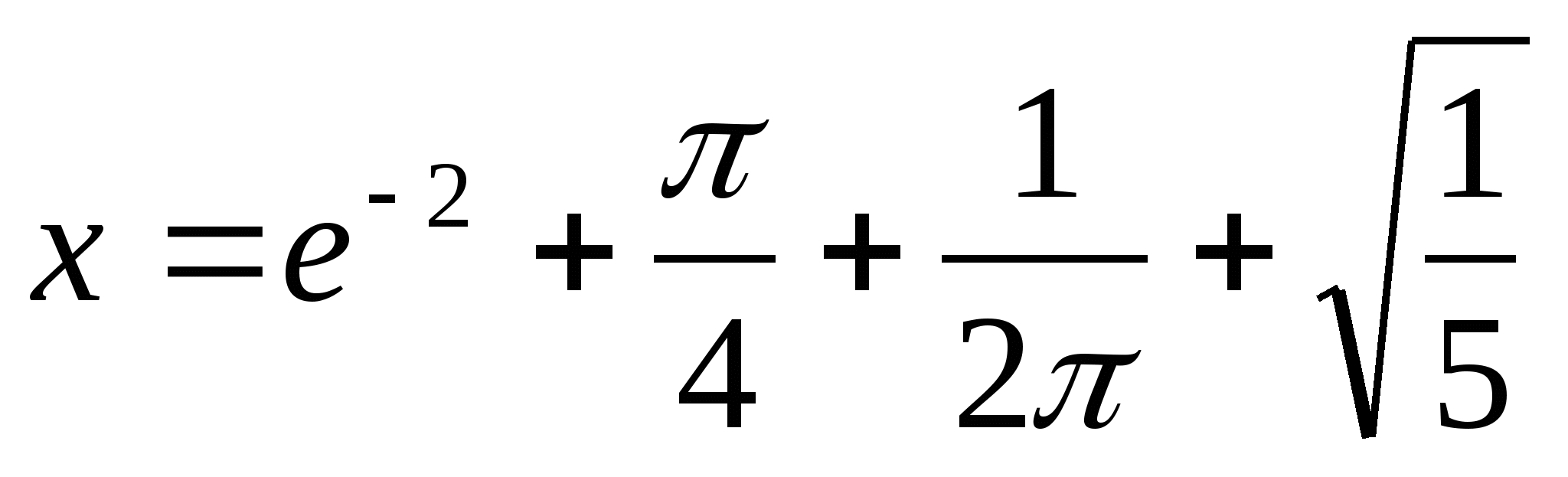
IV



4

1, 2

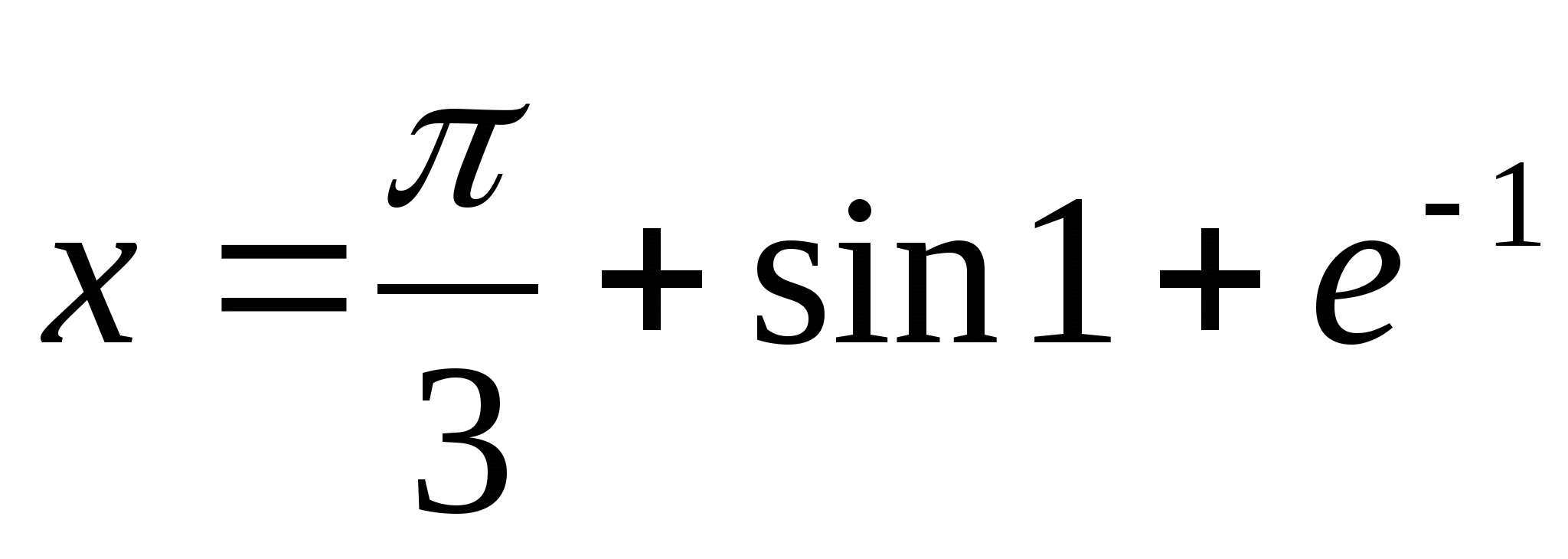
IX



3

2, 3

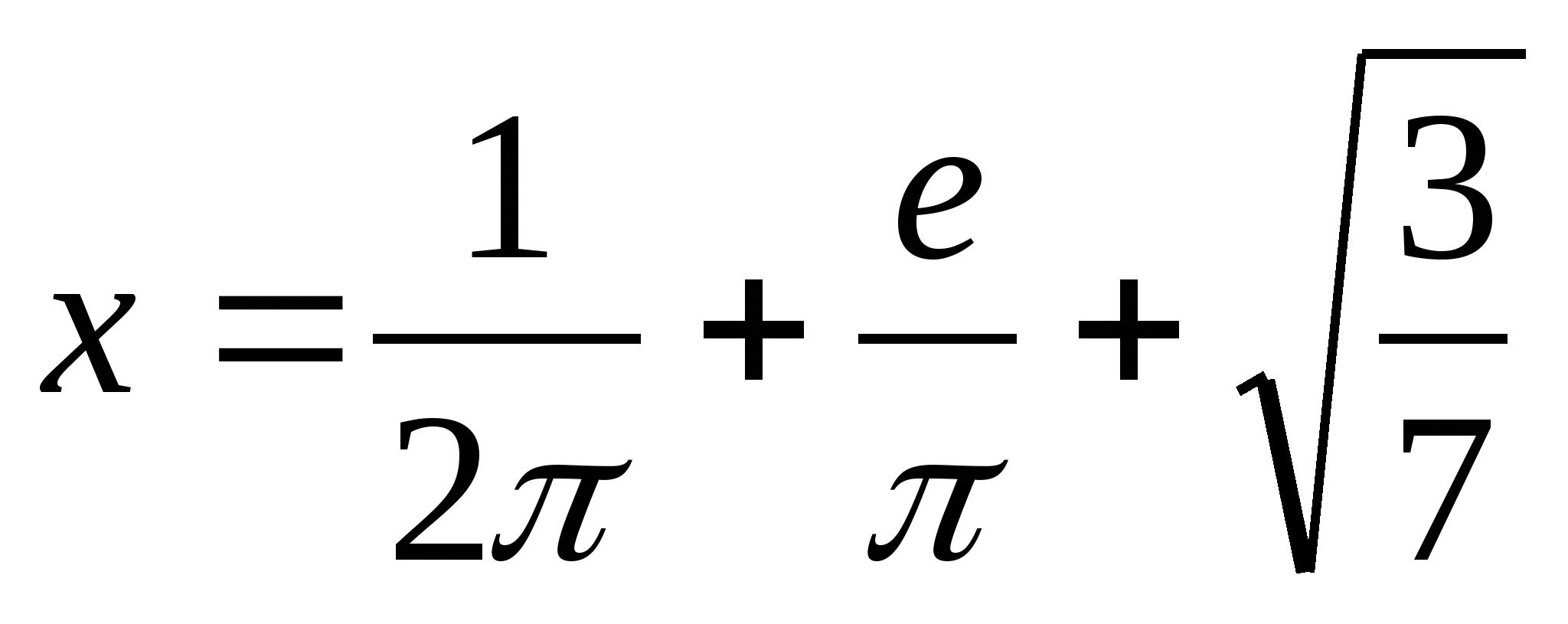
V



2

3, 4

X



4

2, 3

**ЗАДАНИЕ 2**Вычислить разность с указанным числом значащих цифр.

Вариант

Разность

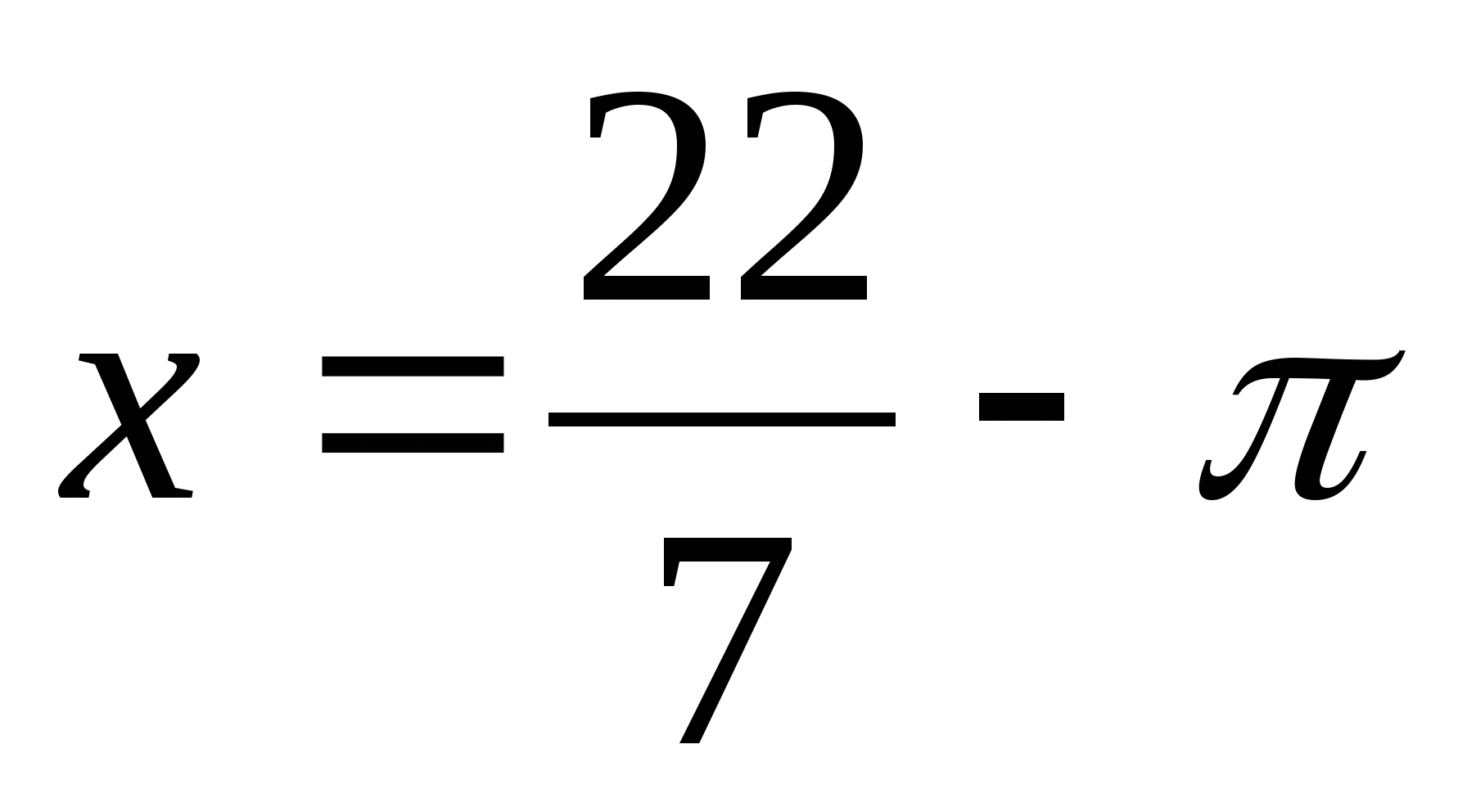
Значащих цифр

Вариант

Разность

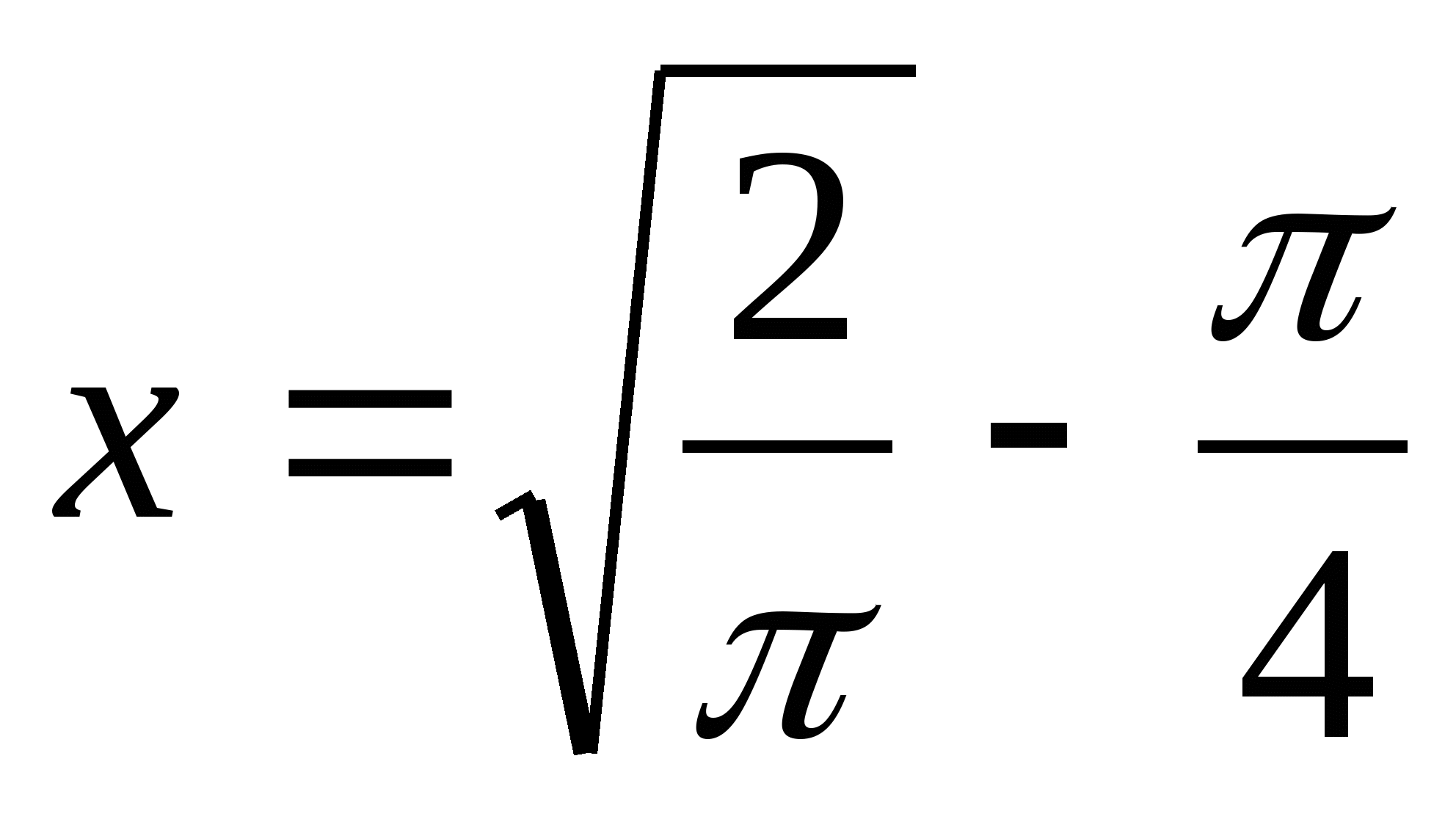
Значащих цифр

I



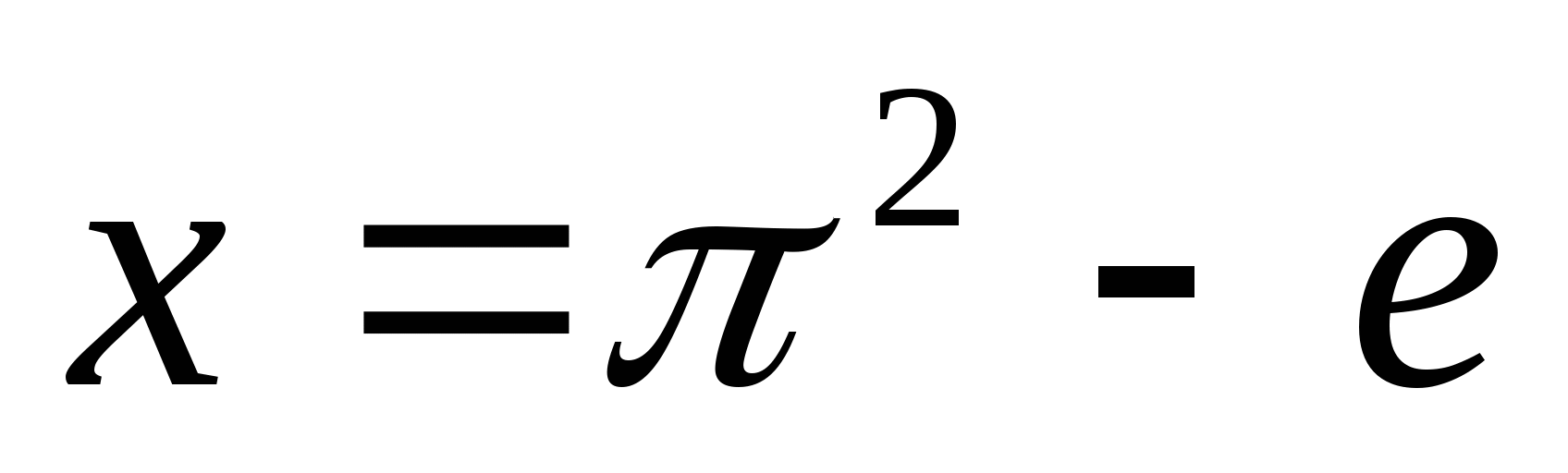
3

VI



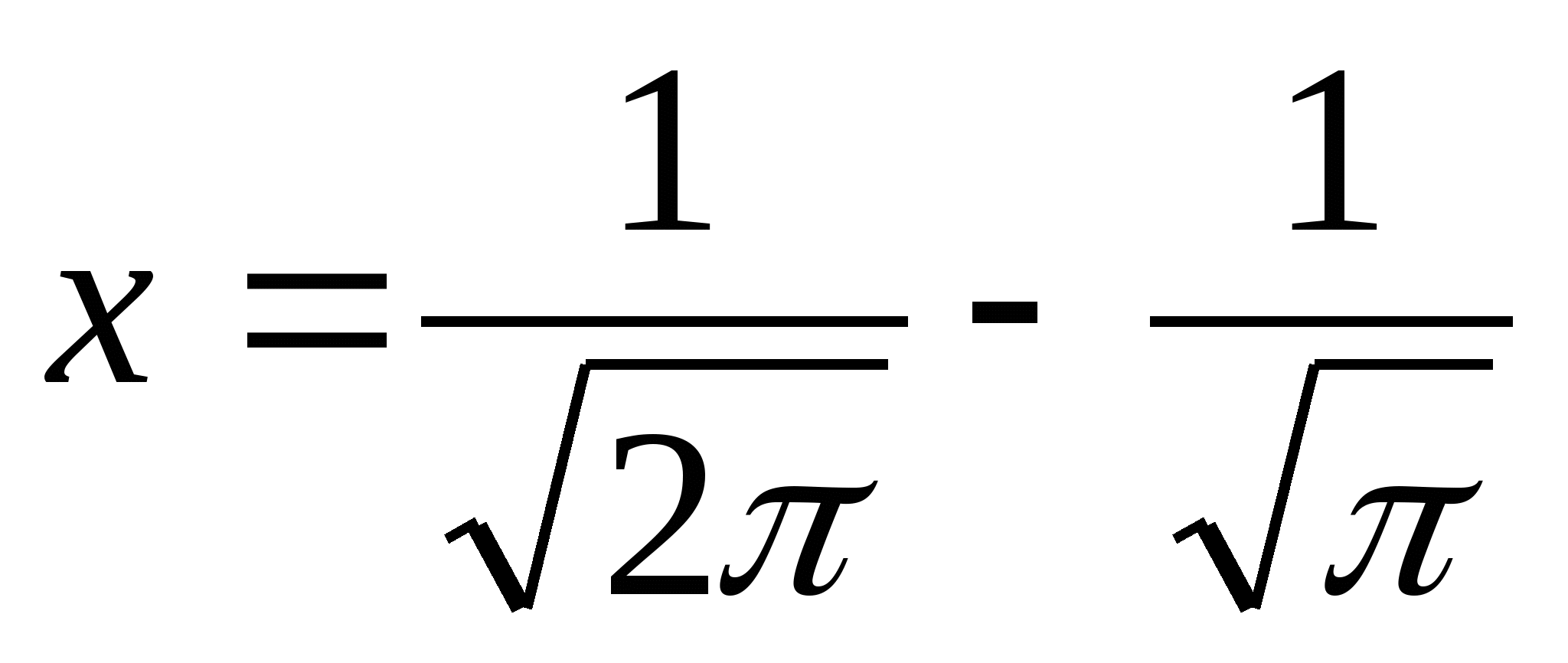
3

II



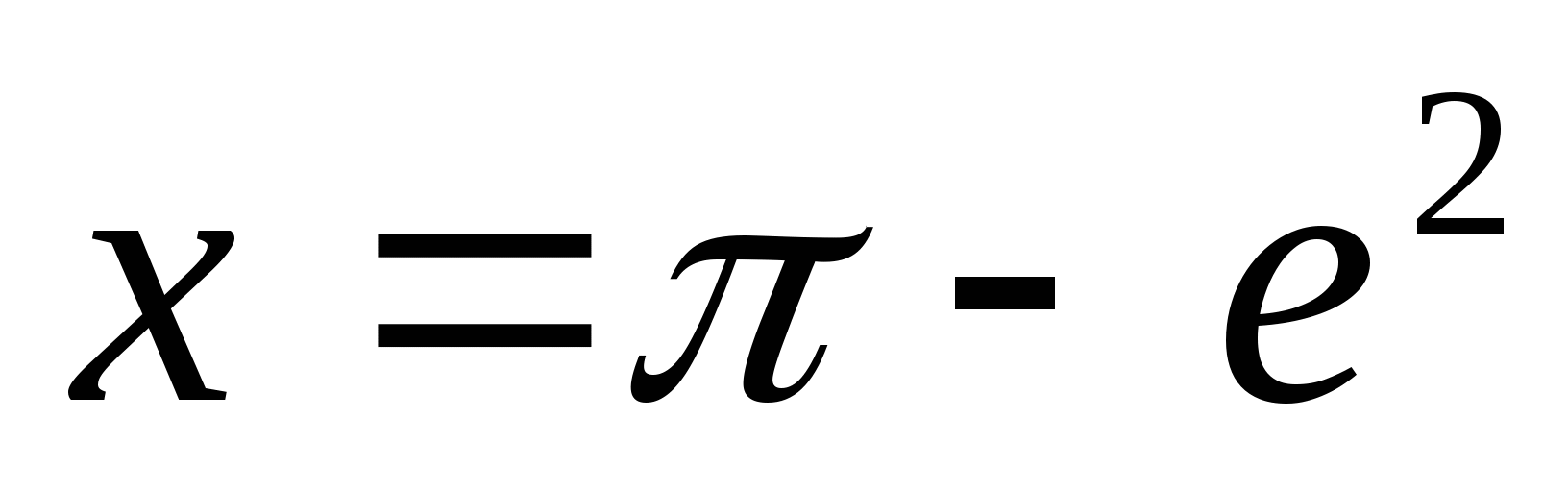
4

VII



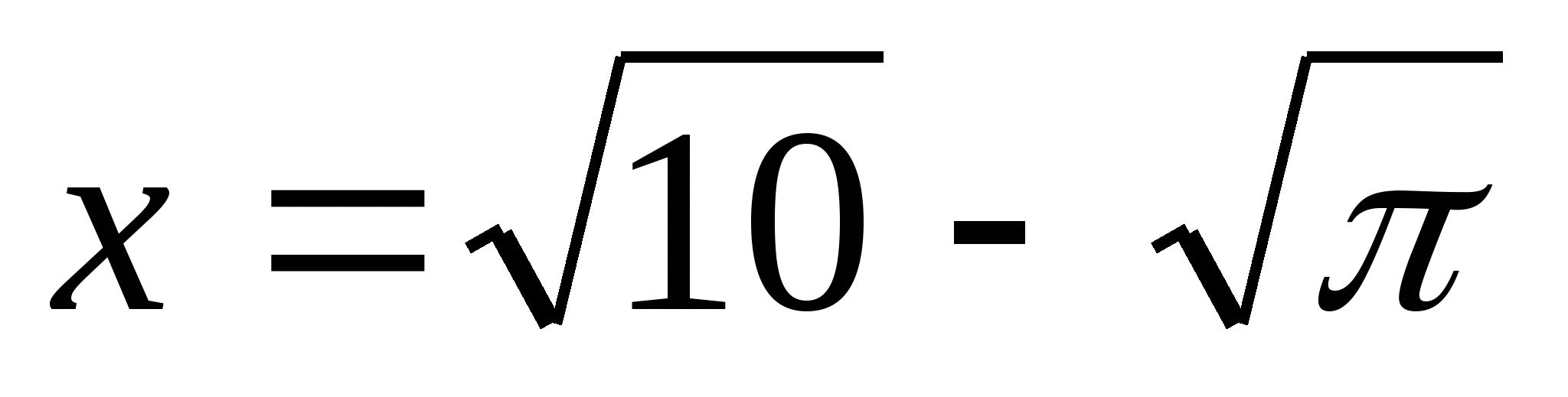
3

III



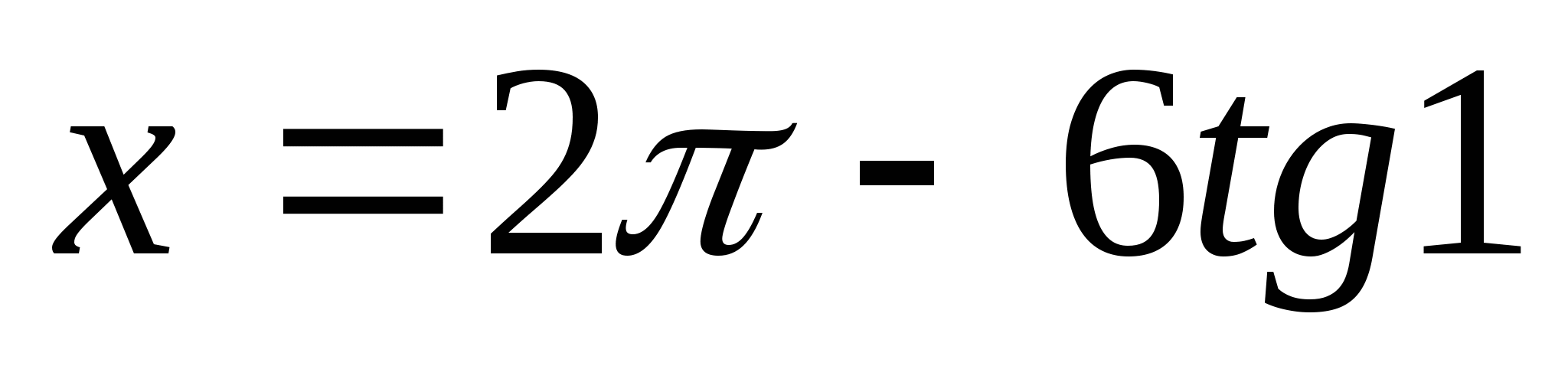
2

VIII



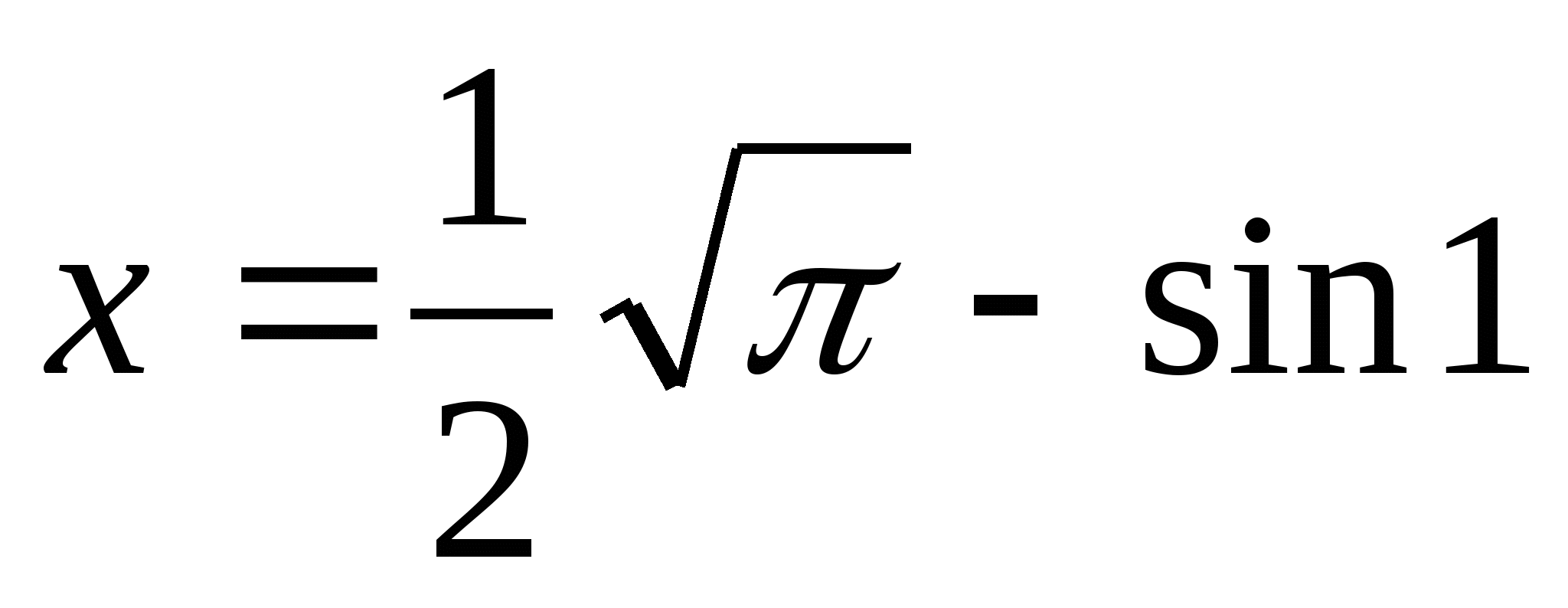
4

IV



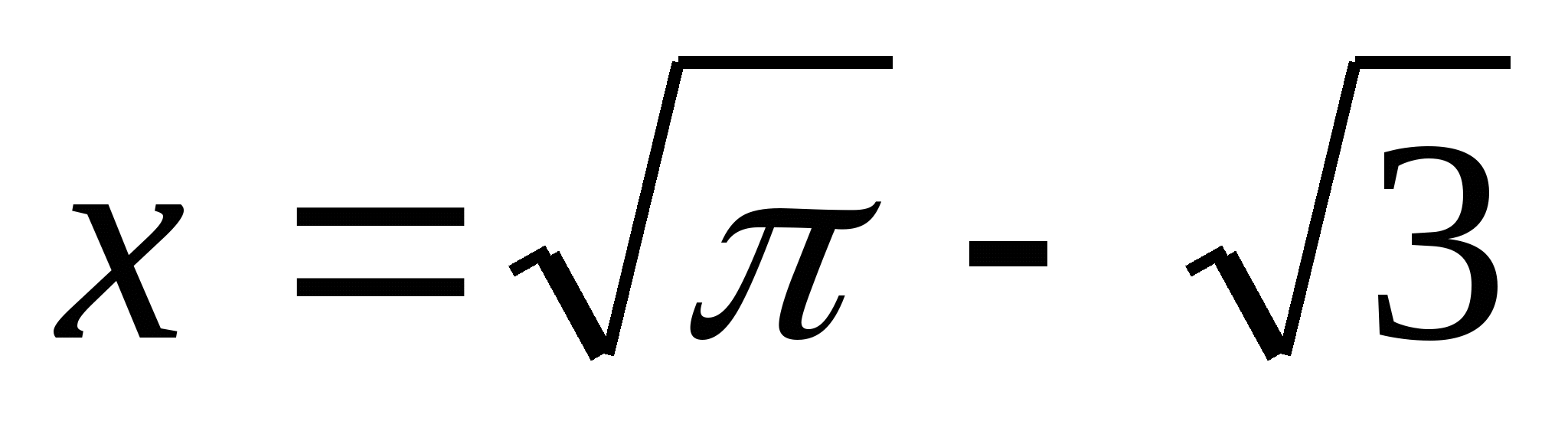
3

IX



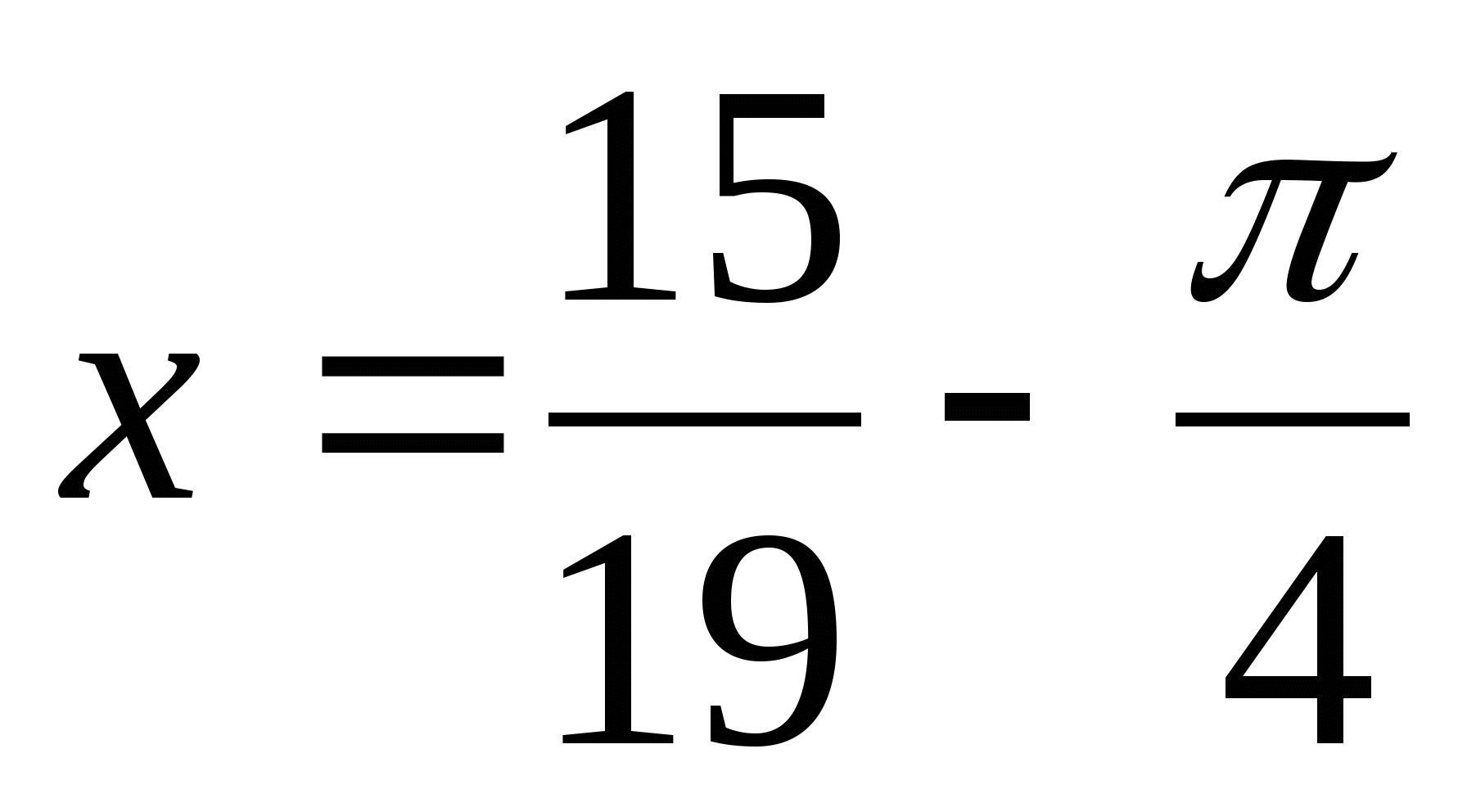
4

V



2

X



5

**ЗАДАНИЕ 3**Найти произведение приближенных чисел (2 способами). Определить, сколько значащих цифр имеет произведение, указать верные и сомнительные цифры.

Вариант

a

b

Вариант

a

b

I

1,58 ± 0,005

0,973 ± 0,0005

VI

1,109 ± 0,0005

78,5184 ± 0,00005

II

3,77 ± 0,005

1,107 ± 0,005

VII

4,371 ± 0,0005

97,106 ± 0,0005

III

0,108 ± 0,0005

90,7 ± 0,05

VIII

5,804 ± 0,0005

105,84 ± 0,005

IV

10,1071 ± 0,00005

0,13 ± 0,005

IX

10,382 ± 0,0005

64,42 ± 0,005

V

0,015 ± 0,0005

11,1073 ± 0,00005

X

0,15 ± 0,005

99,908 ± 0,0005

**ЗАДАНИЕ 4**Вычислить и указать количество значащих цифр в результате, если исходные данные – приближенные числа, определенные с точностью до половины единицы последнего разряда.

Вариант

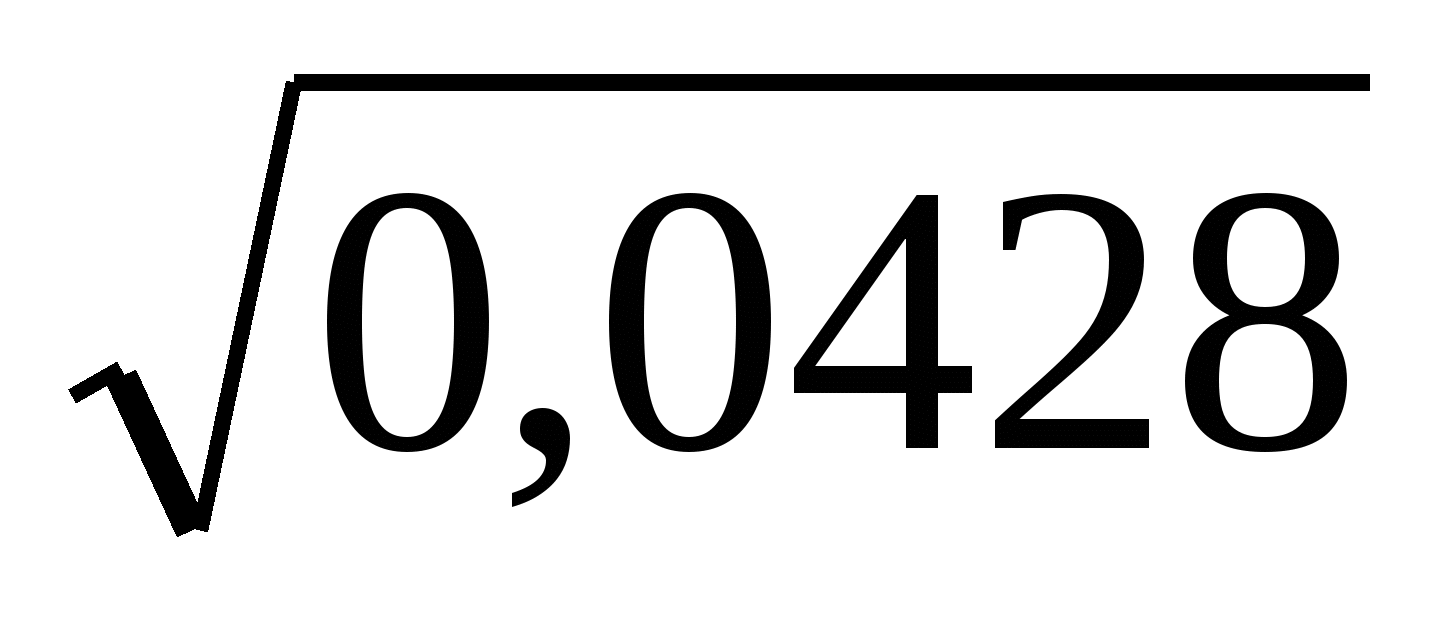
Задания

Вариант

Задания

I

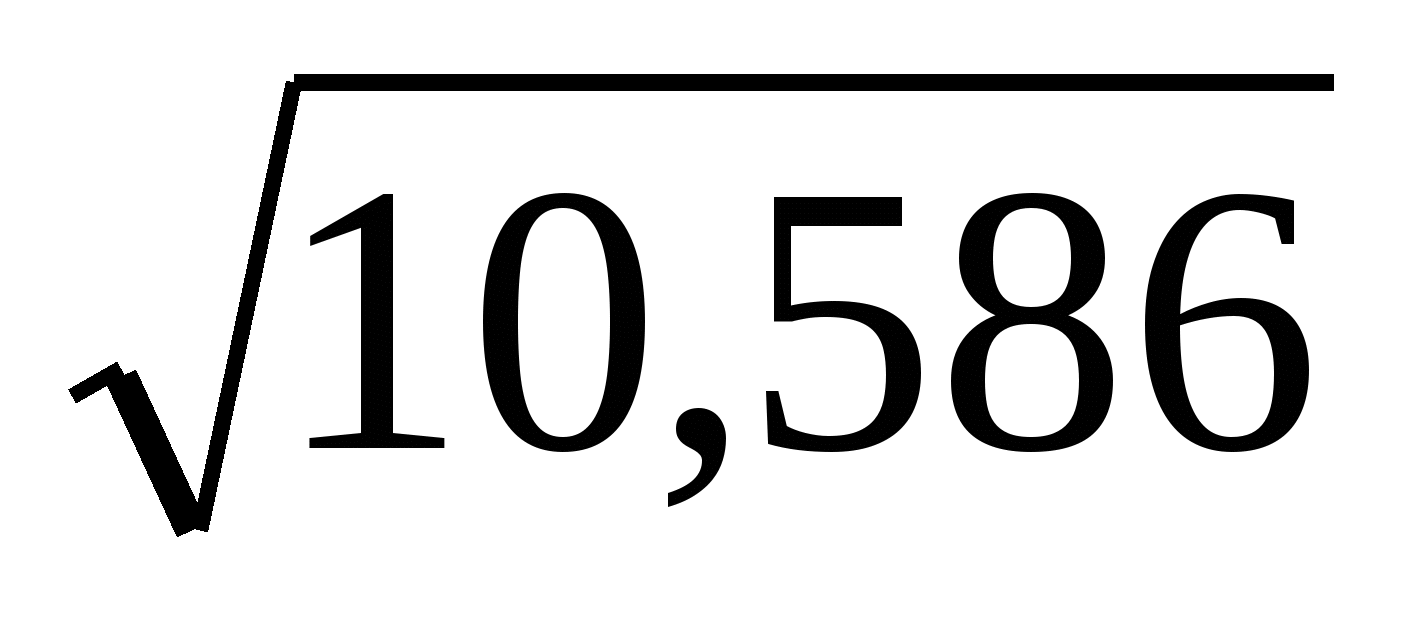
(0,378)3



0,7342 : 0,3271

VI

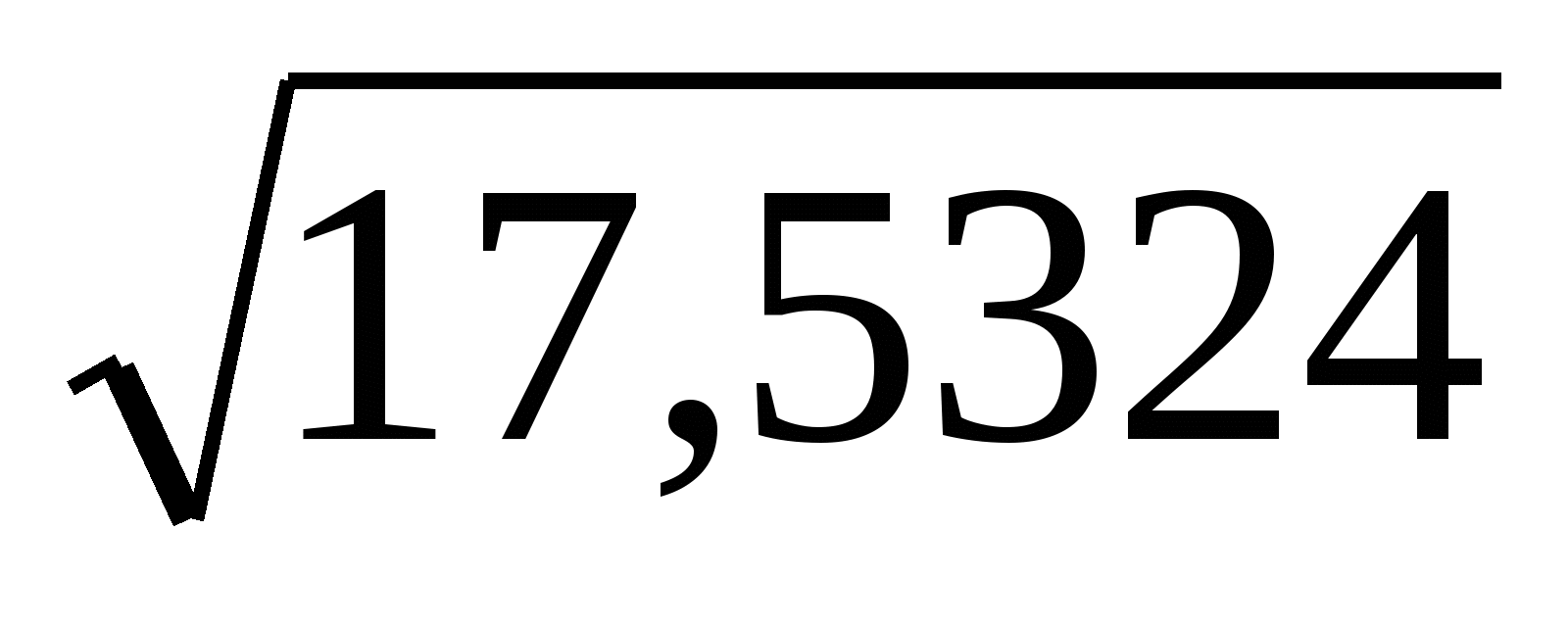
(2,6019)4



6,78542 : 3,015

II

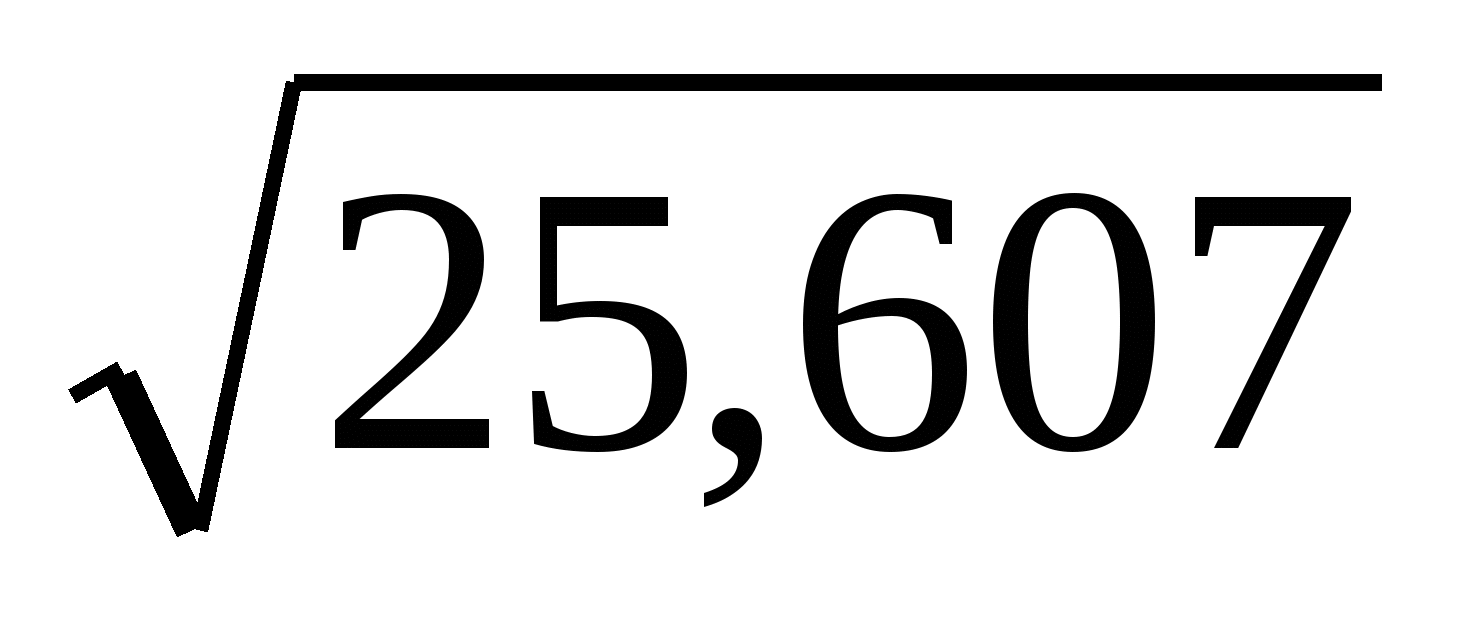
(7,542)2



6,7 : 2,3784

VII

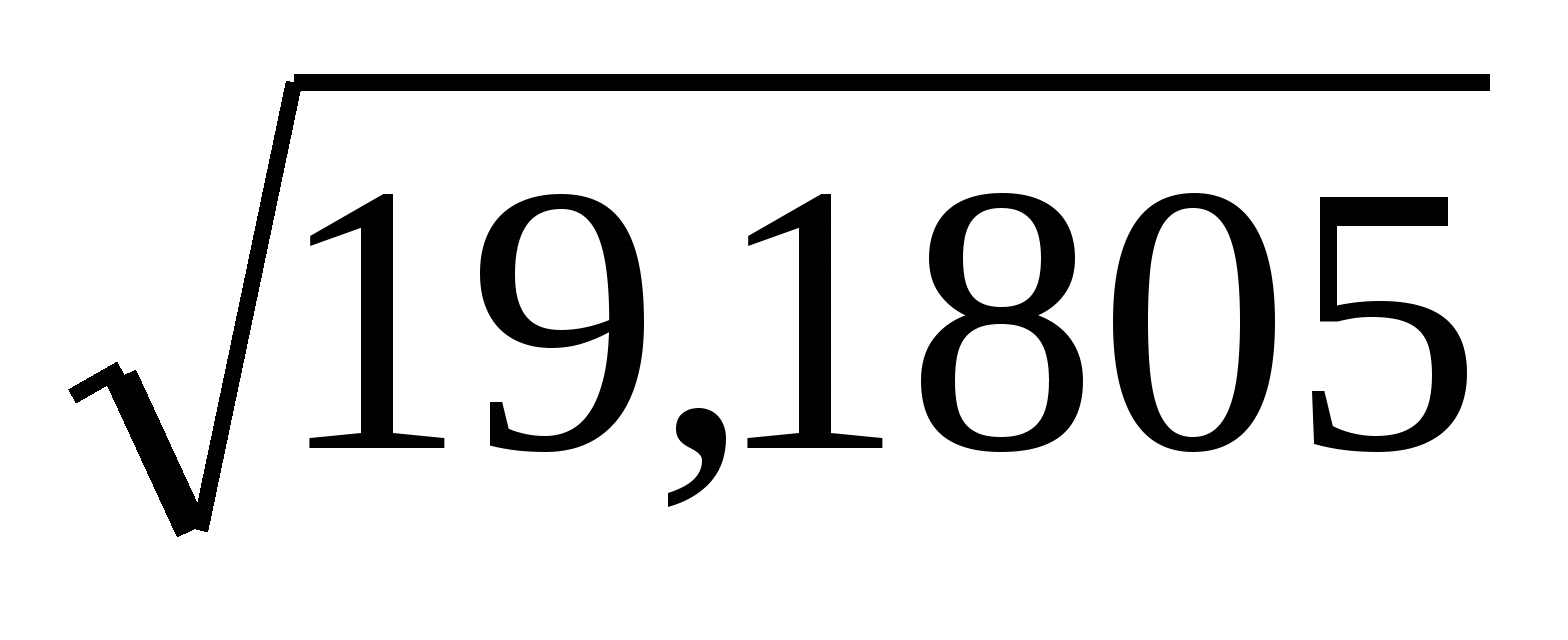
(10,1013)2



4,50189 : 2,78

III

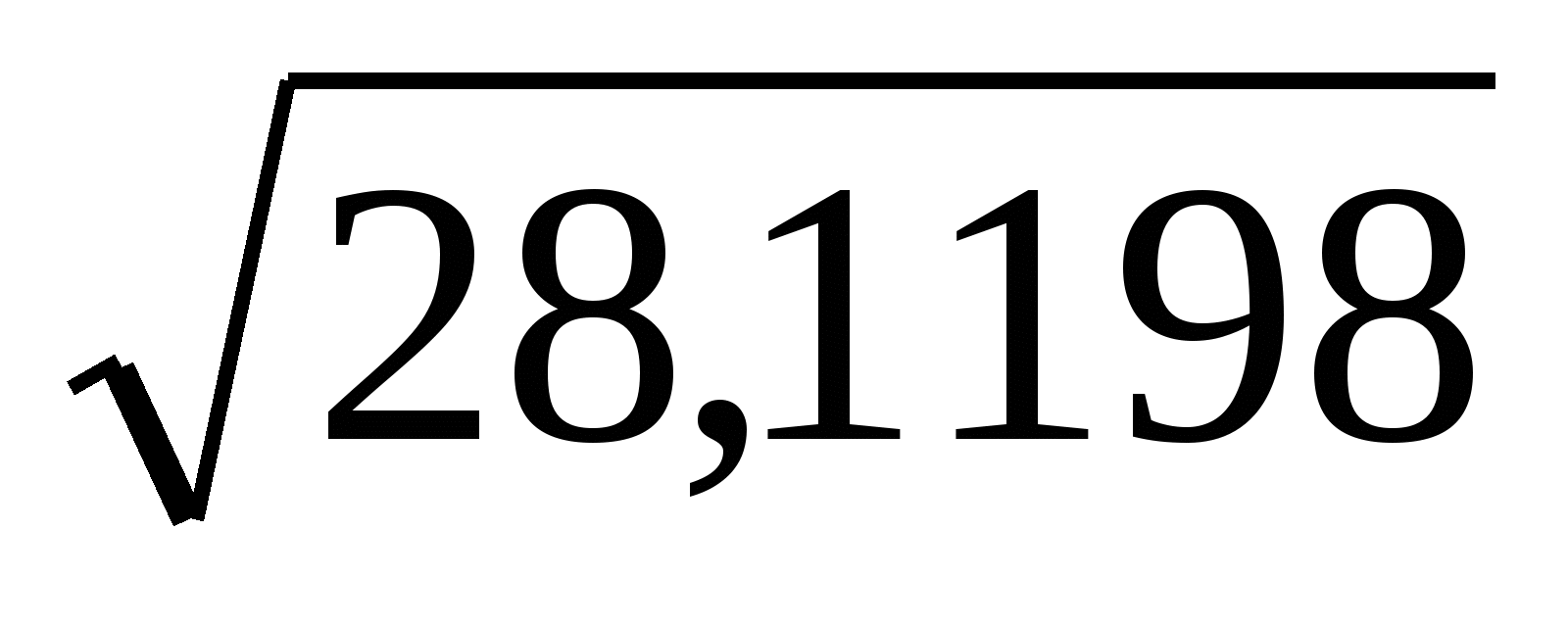
(5,689)4



27,61843 : 8,3

VIII

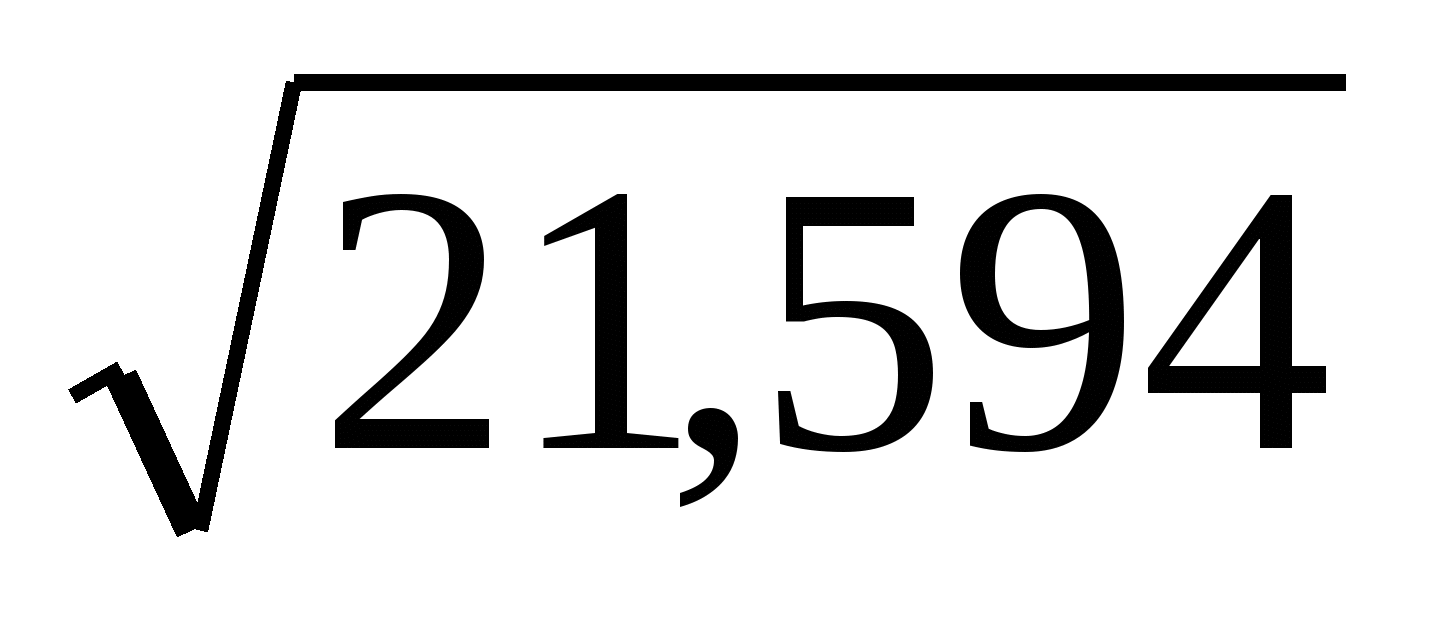
(0,419)3



12,01809 : 6,001

IV

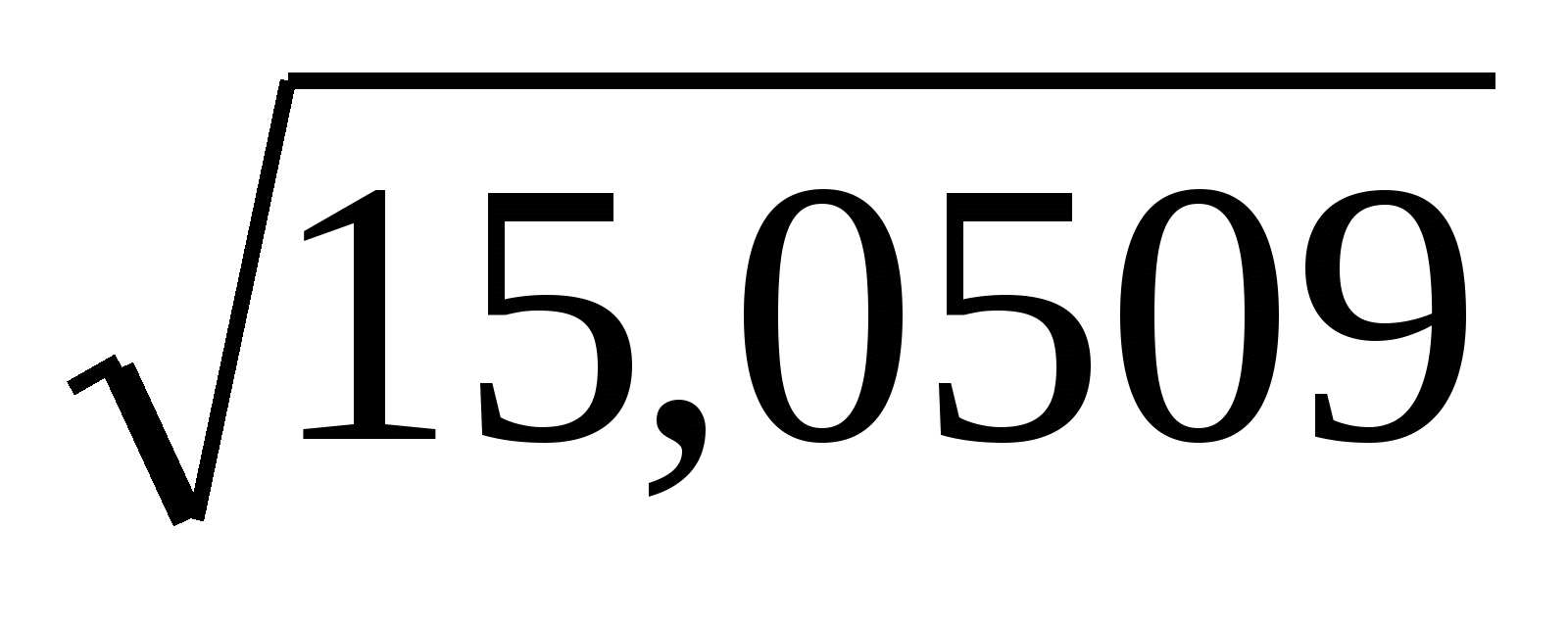
(0,129)2



25,98595 : 10,57

IX

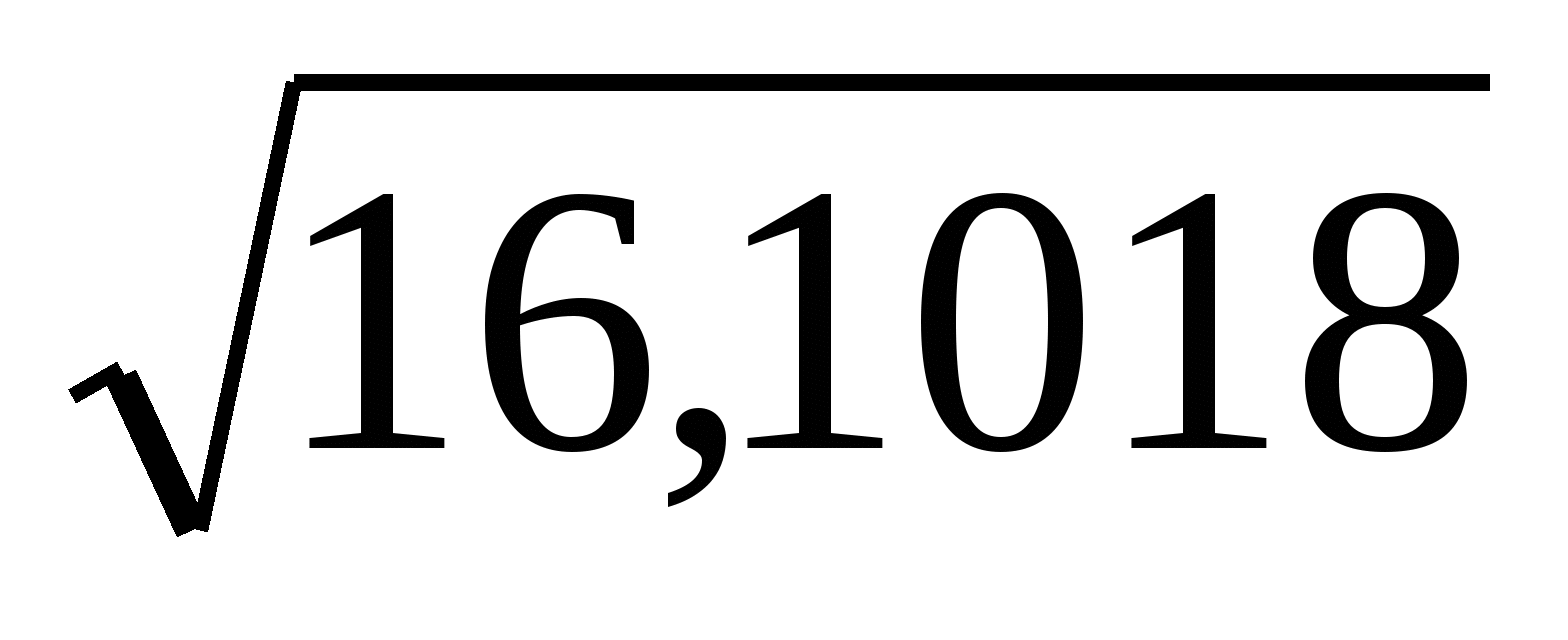
(0,5601)2



25,4207 : 8,704

V

(3,586)3



8,92 : 4,5401

X

(1,1809)2



31,560185 : 5,7894

**ЗАДАНИЕ 5**Вычислить с указанным числом значащих цифр.

Вар.

Пример

Зн. ц.

Пример

Зн. ц.

Вар.

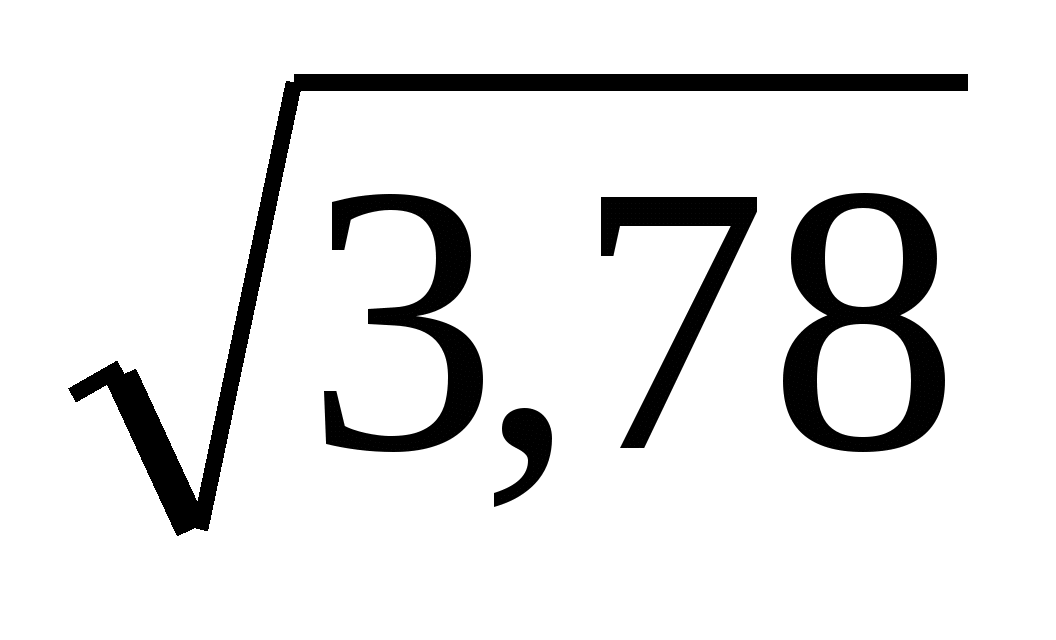
Пример

Зн. ц.

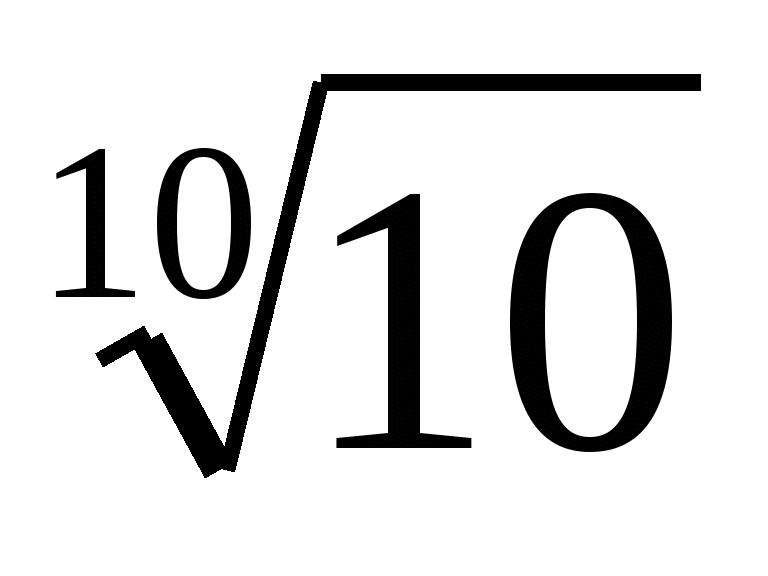
Пример

Зн. ц.

I

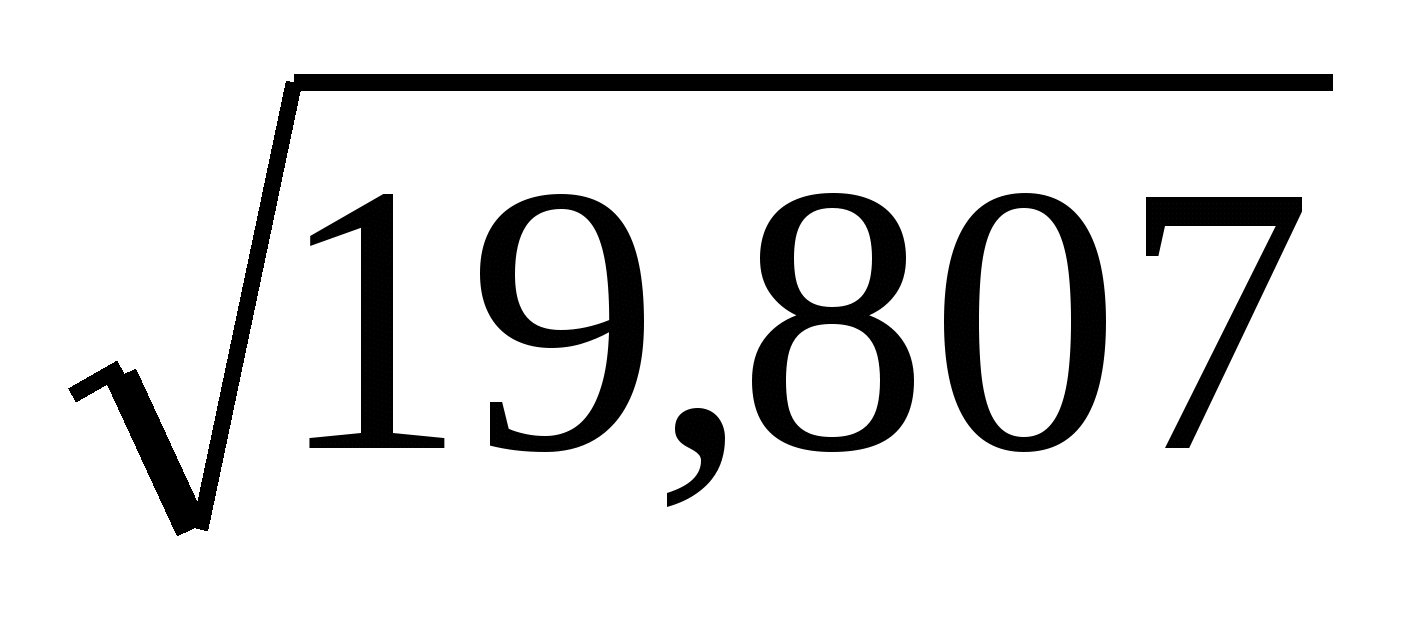


6

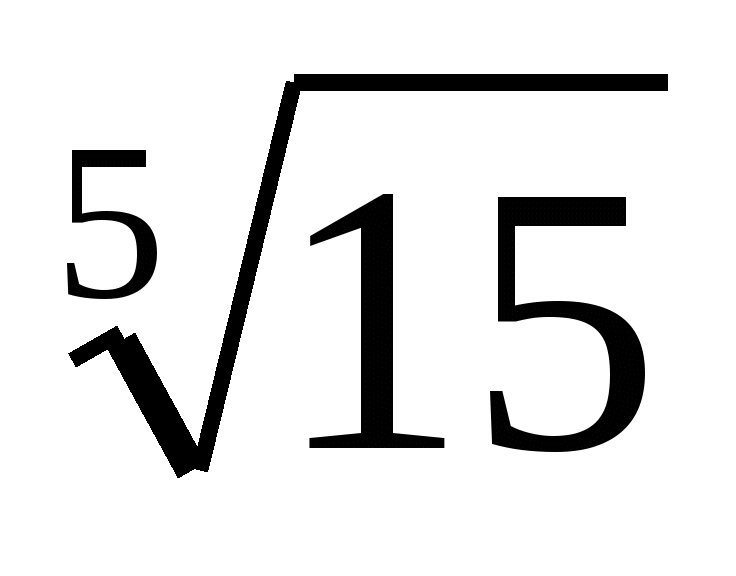


5

VI



8

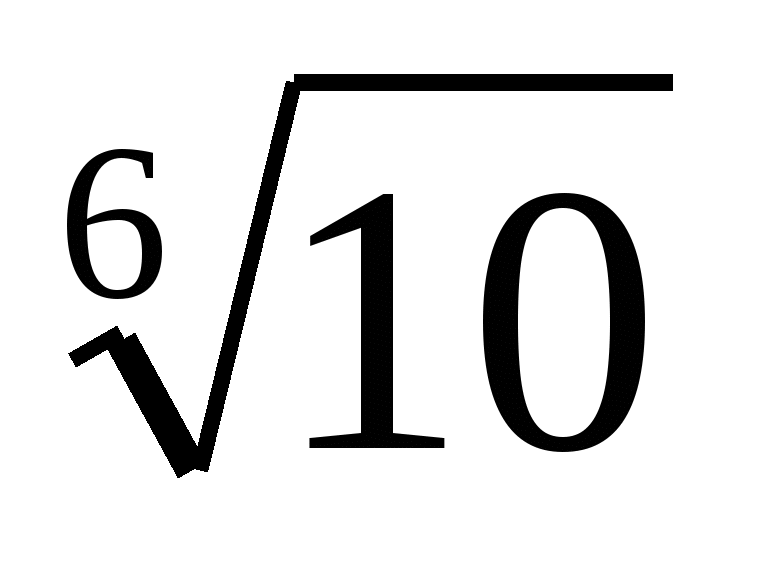


8

II

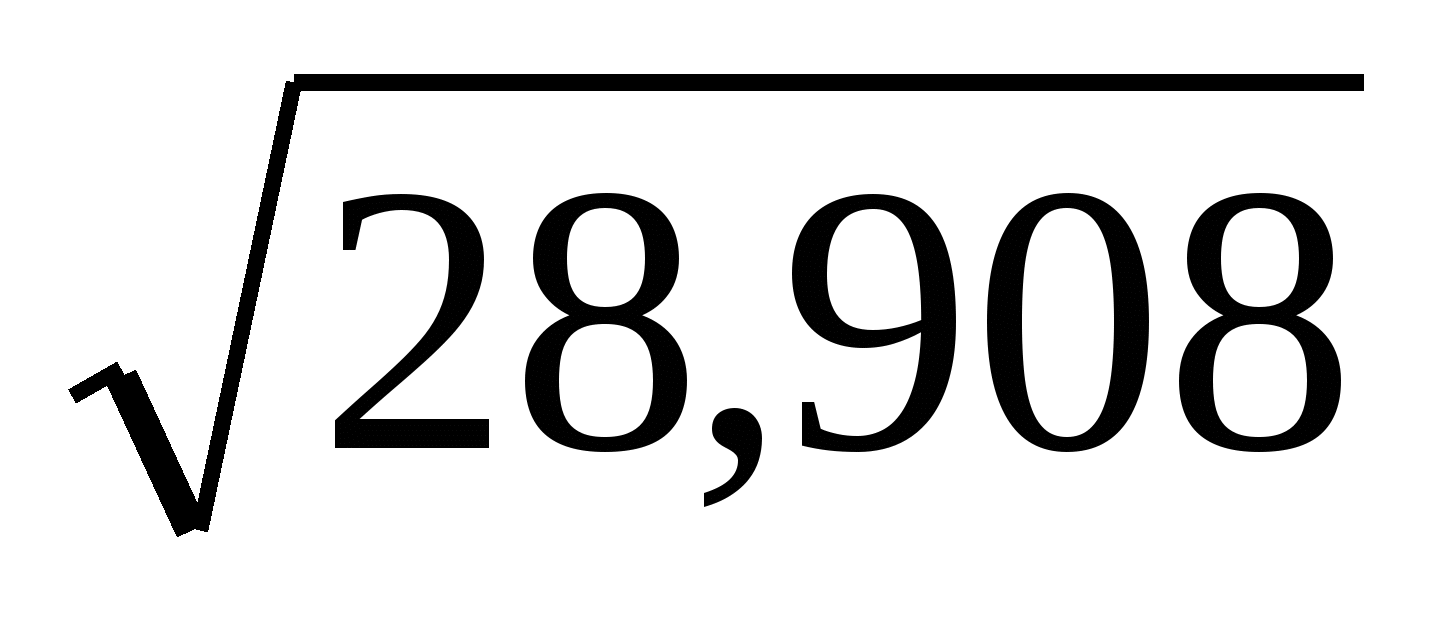


5

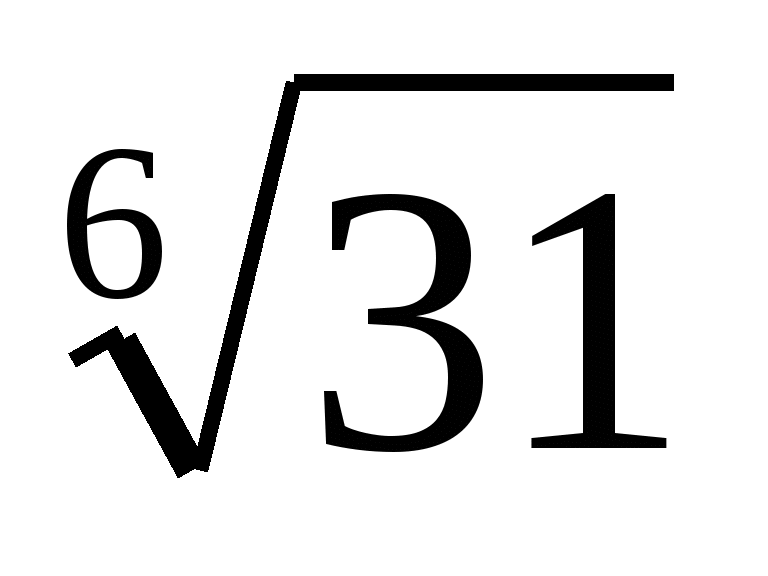


8

VII

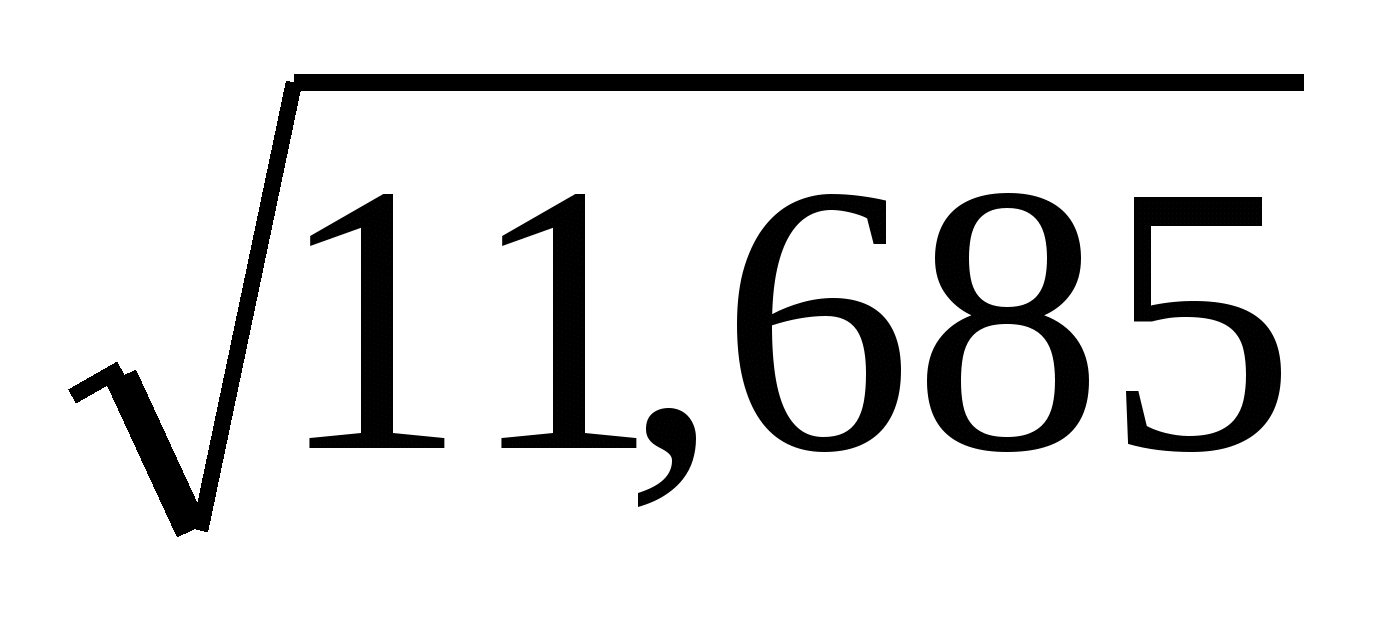


9

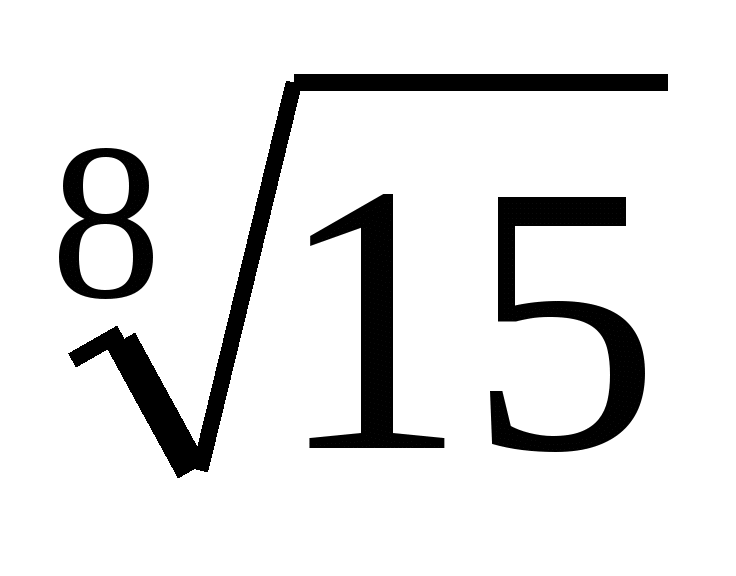


9

III

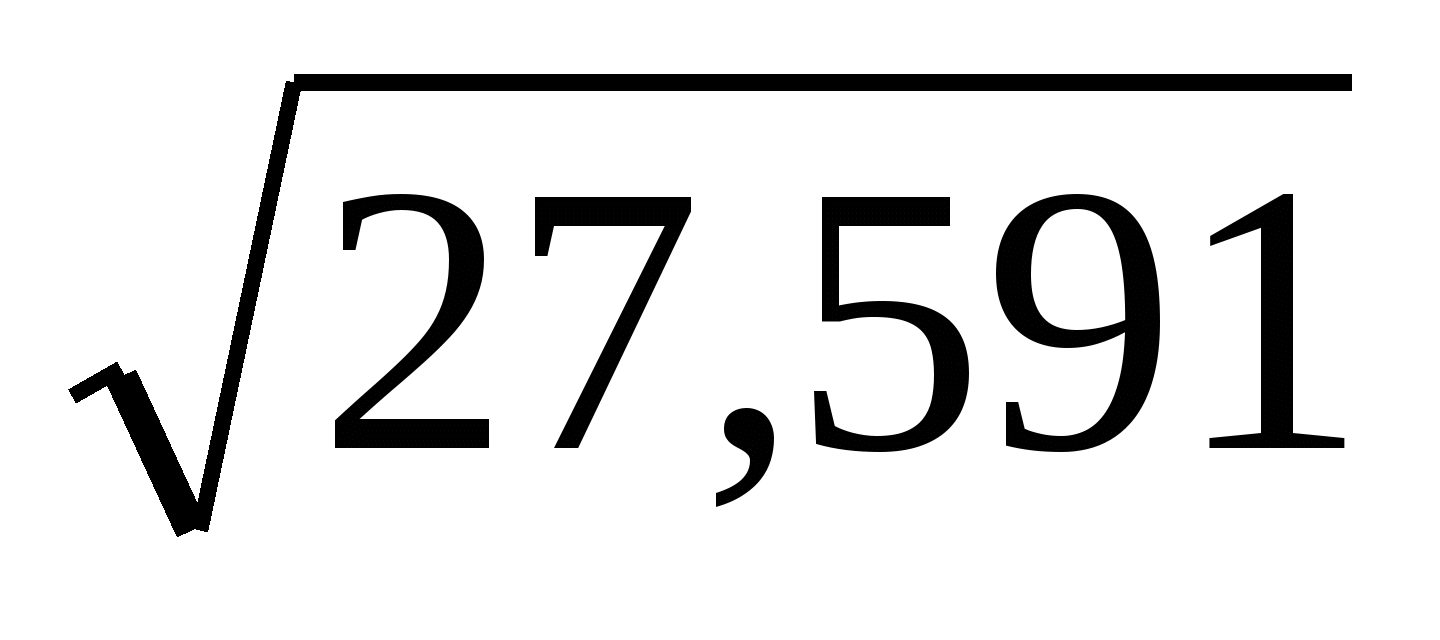


4

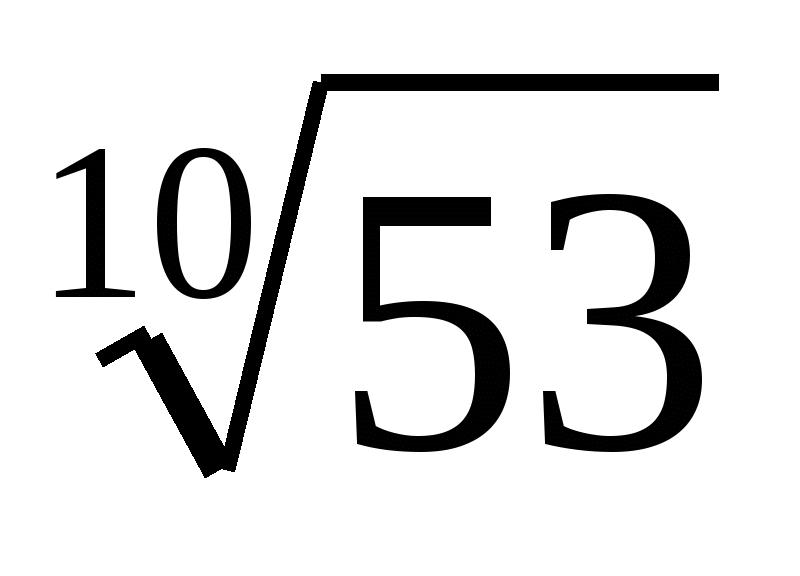


7

VIII

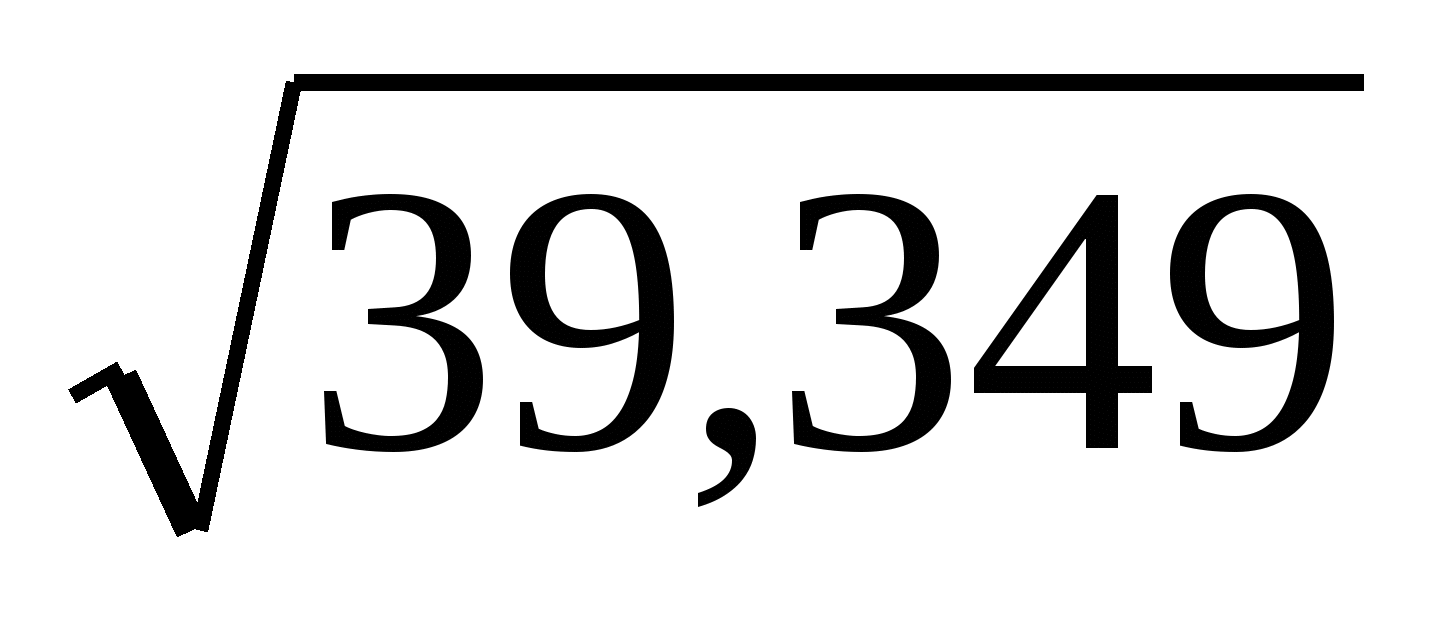


7

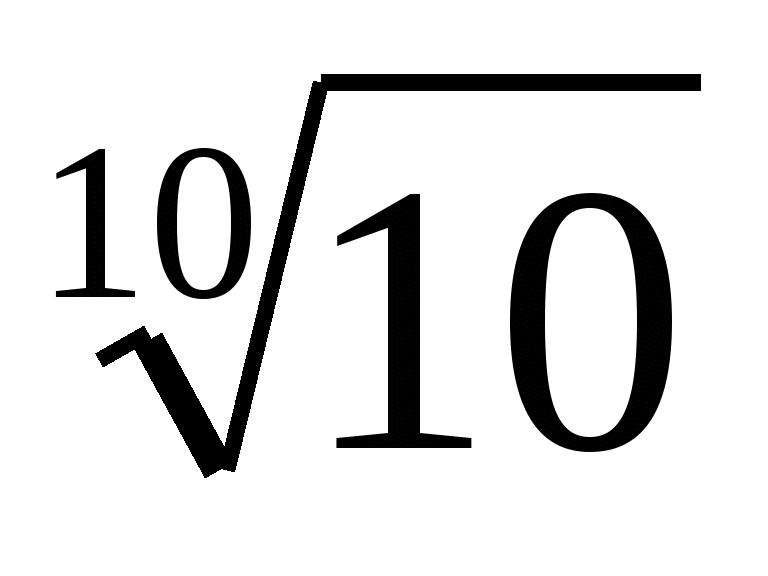


7

IV



5

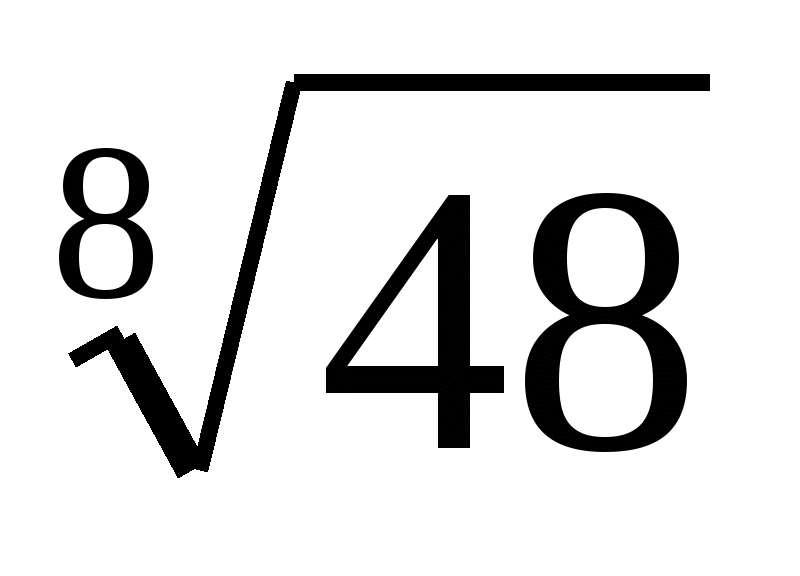


6

IX

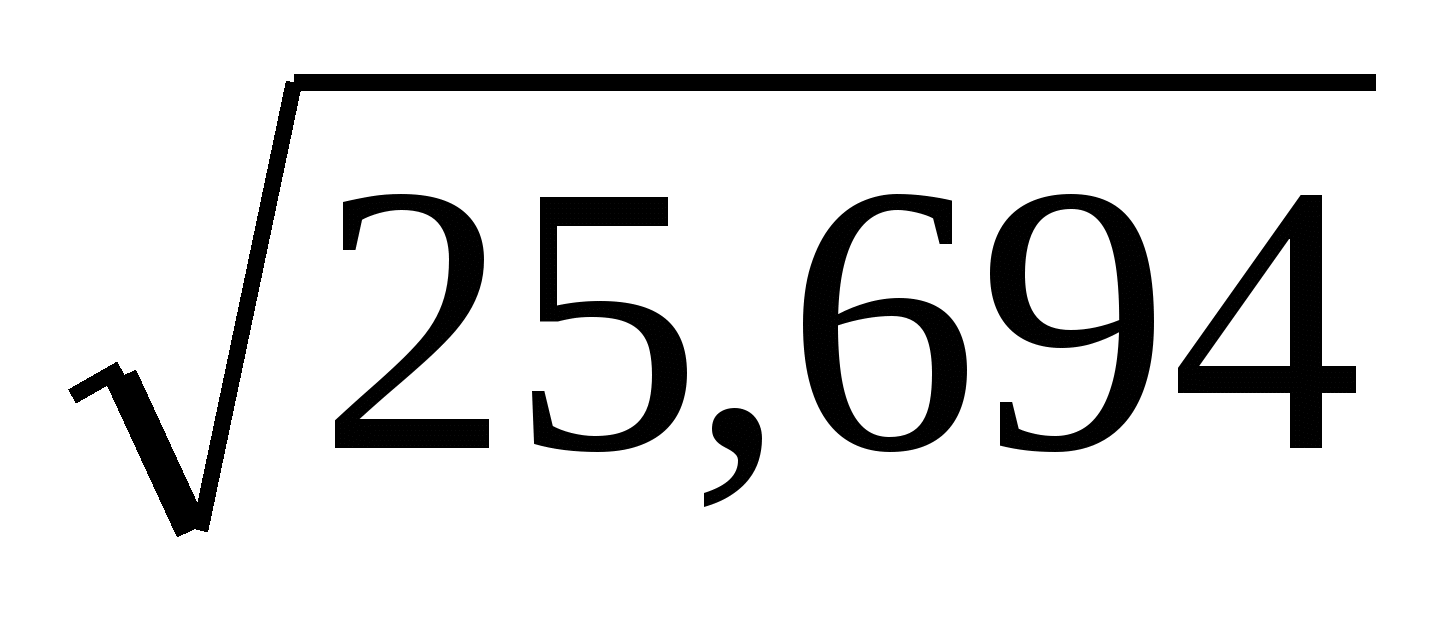


8

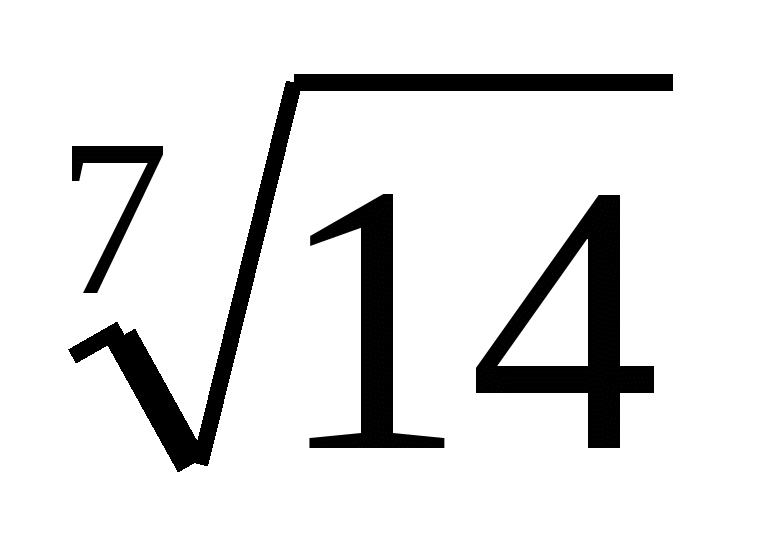


8

V

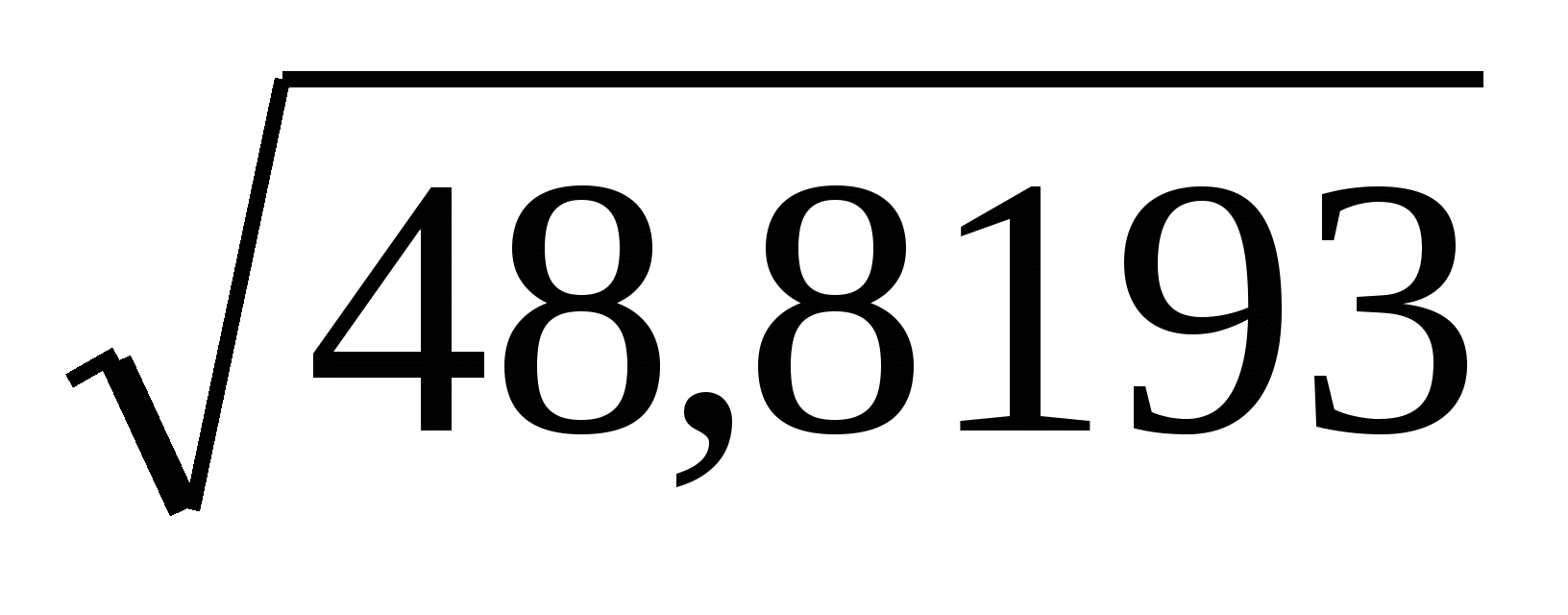


6

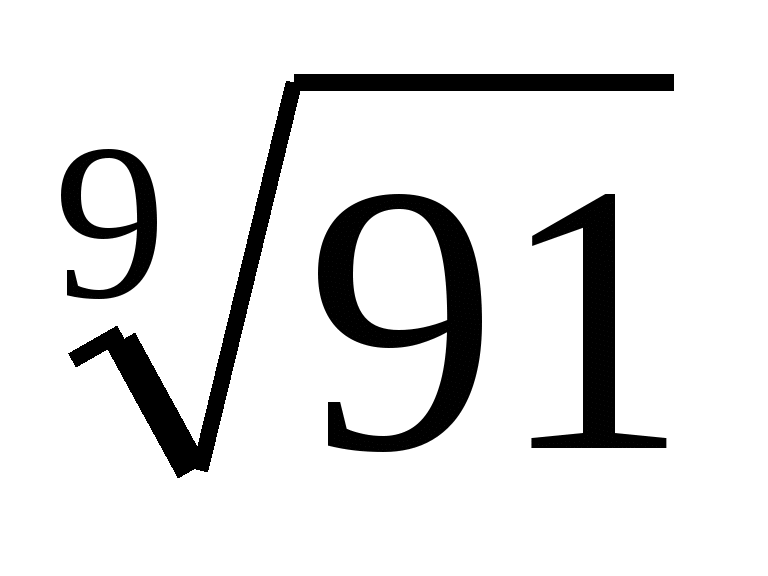


8

X



7



5

**ЗАДАНИЕ 6**Решить задачу на определение абсолютной (относительной) погрешности.

**I в.**Укажите относительную погрешность, которая получится, если число 6,572 заменить числом 6,57.

**II в.**Стороны параллелограмма равны 11 и 12 см, меньшая диагональ – 13 см. В результате измерения линейкой большей диагонали получили 18,9 см. Какова относительная погрешность этого приближения?

**III в.** В равнобедренном треугольнике длина основания равна 24 см, а боковой стороны – 15 см. В результате измерения линейкой радиусов, вписанной и описанной окружностей, получили соответственно 4,1 и 12,3 см. Найдите относительные погрешности этих приближений.

**IV в.** Скорость света в вакууме (299792,5 ± 0,4) км/с, а скорость звука в воздухе (331,63 ± 0,004) м/с. Что измерено с большей точностью?

**V в.**Какая из характеристик самолета «АН-24» дана точнее: размах крыла 29,2 м; взлетная масса 21 т; собственная масса 13,9 т; практический потолок высоты 8,9 км?

**VI в.** Округлите число 6,87 до десятых и найдите абсолютную и относительную погрешность.

**VII в**. Найдите относительную погрешность приближенного значения a = 0,143 величины x = 1/7.

**VIII**в. Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит 10%, если в его записи две значащие цифры.

**IX в.** Докажите, что относительная погрешность приближенного числа не превосходит 1%, если в его записи три значащие цифры.

**X в.**Найдите границы значений грузоподъемности автомобиля ГАЗ-51А, если она равна 2,5 (±15%) т.

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Что такое погрешность?
2. В чем разница между абсолютной погрешностью и относительной?
3. Каким числом является результат действий с приближенными числами?
4. Почему при приближенных вычислениях погрешность может накапливаться?

**Практическая работа №3.   
Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методами хорд и касательных.**

**ЦЕЛЬ:**Закрепить навыки решения уравнений приближенными методами.

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:**Программа MS Office Excel.

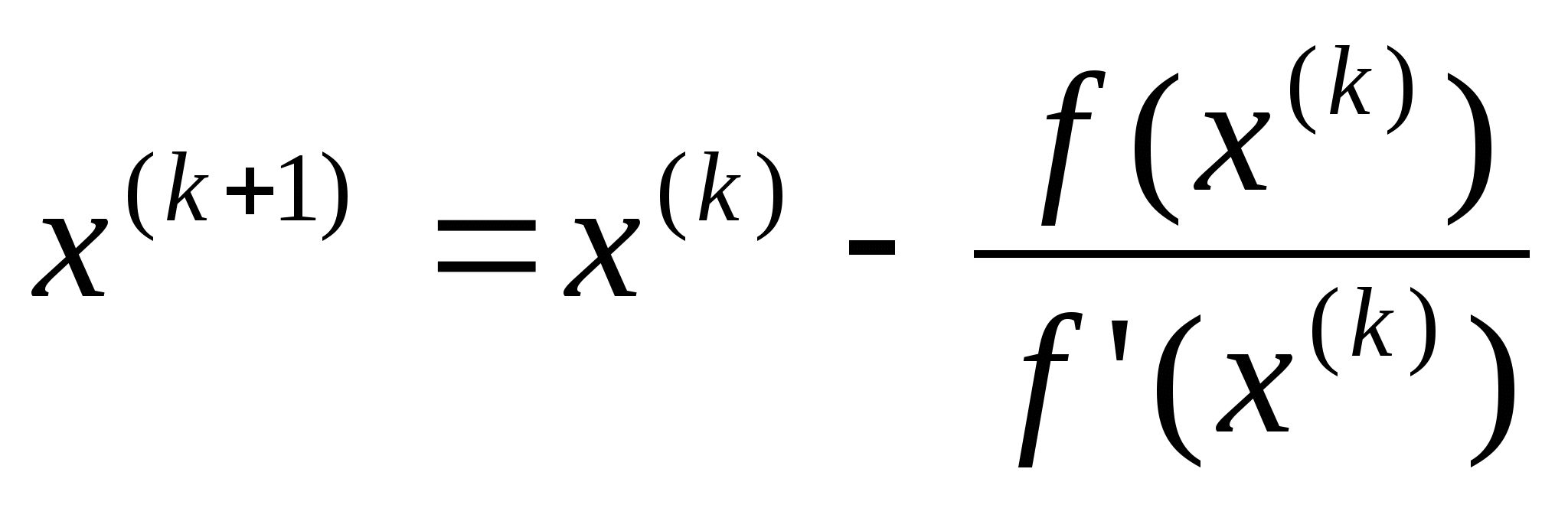
**Форма отчета:**

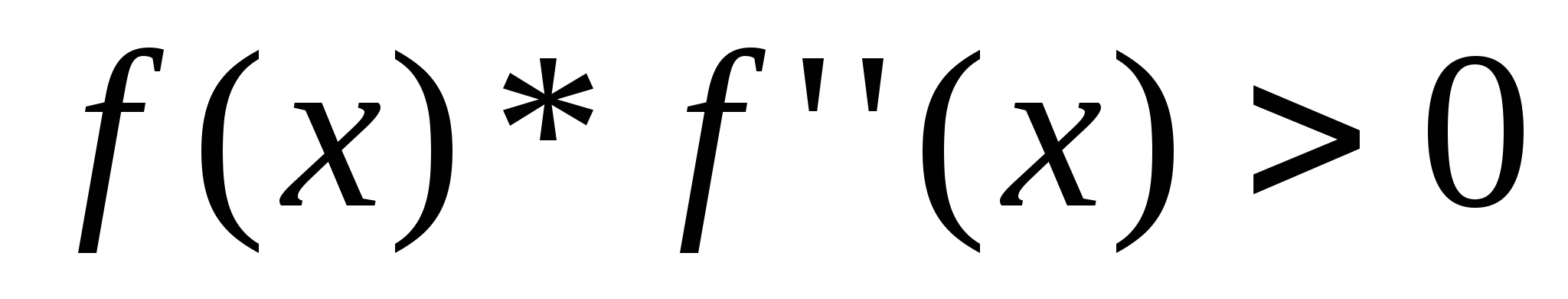
* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

**КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:**

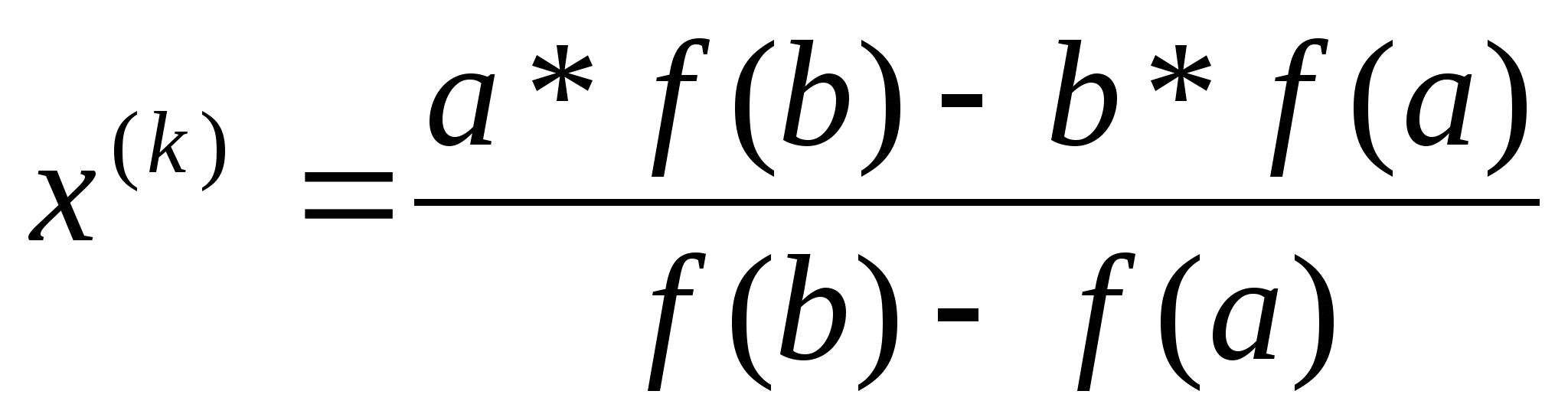
*Метод касательных (метод Ньютона)*

Итерационная формула метода Ньютона имеет вид: 

В качестве начального приближения выбирается та из границ отрезка [a ; b] на которой выполняется условие: 

Выполнение итераций повторяют пока не будет выполнено |x(k) –x(k-1)| ≤ ε

*Метод хорд*

Итерационная формула имеет вид: 

Отрезок [a ; b] делится затем на два отрезка: [a ; x(k)] и [x(k) ; b]. Выбирается новый отрезок, в зависимости от условия:

* если f(a)>0 и f(x(k))>0 или f(a)<0 и f(x(k))<0 то отрезок [x(k) ; b]
* если f(b)>0 и f(x(k))>0 или f(b)<0 и f(x(k))<0 то отрезок [a ; x(k)]

Выполнение итераций повторяют, пока не будет выполнено |x(k)– x(k-1)| ≤ ε

*Комбинированный метод хорд и касательных*

Метод основан на построении схематического графика функции, определении интервалов его пересечения с осью абсцисс и последующим «сжатием» этого интервала при помощи строимых хорд и касательных к графику этой функции.

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:**

1. Получить вариант у преподавателя.
2. Выполнить задания согласно своему варианту.

**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:**

1. Изучить материал лекции.
2. Ознакомиться с заданиями практической работы.
3. Изучить методические указания.
4. Выполнить задания.
5. Оформить отчет по проделанной работе.

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**

**Задание 1.**Отделить корни алгебраического уравнения *ax3 + bx2+ cx + d = 0* графическим или аналитическим способом и уточнить корни комбинированным методом хорд и касательных до 0,001.

Вар.

Коэффициенты

a

b

c

d

I

1

-0,2

0,4

-1,6

II

2

-0,1

0,3

-1,4

III

1

-0,3

0,1

-1,3

IV

2

-0,4

0,2

-1,1

V

1

-0,5

0,4

-1,2

VI

2

-0,1

0,2

-1,7

VII

2

-0,2

0,5

-1,9

VIII

1

-0,4

0,2

-1,5

IX

2

-0,5

0,3

-1,8

X

1

-0,1

0,4

-1,1

**Задание 2*.***Отделить корни трансцендентного уравнения графическим способом и уточнить их методом итераций до 0,001.

Вариант

Задание

Вариант

Задание

I

*-0,5x = cos2x*

VI

*x = 2sin 2x*

II

–*x/3 = sin 3x*

VII

*-x = 5sin3x*

III

*-0,3x = cos x*

VIII

*cos 3x = 2x*

IV

*0,4x = cos(0,5x)*

IX

*4sin(1,5x)-2,8x=0*

V

*-x = 4cos x*

X

*cos(2,5x)-4x=0*

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Если итерационный процесс сходится, то какую точку можно брать в качестве нулевого приближения?
2. Можно ли графическим методом найти точку нулевого приближения?
3. В чем преимущество использования комбинированного метода хорд и касательных перед отдельным использованием этих методов?

**Практическая работа №4.**

**Решение систем линейных уравнений приближёнными методами.**

**Цель**: сформировать у студентов представление о решении систем линейных уравнений методом Крамера.

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

**Методические указания:**

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)  (1)

которую можно записывать и в матричном виде, .

здесь *А* - матрица системы, *B -*столбец свободных членов, а *X -*столбец неизвестных.

Постоянные величины https://fhd.multiurok.ru/9/2/4/924839c06861ba454387ab9407f5452636df77dd/praktichieskiie-raboty-6-9-po-tiemie-sistiemy-urav_10.png  называют коэффициентами системы.

*Определение*: Система чисел  называется решением системы уравнений, если числа , ,  удовлетворяют этим уравнениям.

*Определение*: Система называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение , иначе систему называют несовместной.

*Определение*: Совместная система называется определенной, если она имеет единственное решение, и неопределенной, если она имеет больше одного решения.

Определитель второго порядка вычисляется по следующему правилу:

|  |
| --- |
| Соответствующее правило вычисления для определителя третьего порядка имеет вид: |
|  |
|  |

Решение методом Крамера:

1.Сформировать матрицу коэффициентов и вектор свободных членов заданной системы;

2 Вычислить определитель матрицы А (Δ ≠ 0)

3. Вычислить Δj j=1,2,….,n.

4. Вычислить корни

Определитель  получен из главного определителя  заменой *j*–го столбца столбцом .

Определители:

Решение:

Пример: Решить систему  с помощью формул Крамера.

Решение:

Найдем главный определитель   Так как , то данная система имеет единственное решение.

Составим частные определители:

По формулам Крамера имеем: , , .

Если матрица коэффициентов системы невырожденная, то для нахождения решения применим матричный способ. Решением матричного уравнения  является матрица–столбец .

Пример: Решить систему матричным способом

Решение:

Найдем главный определитель   Так как , то данная система имеет единственное решение. Для матричного способа решения определим алгебраические дополнения:  
; ; ;  ; ; ; ; .

Обратная матрица имеет вид:

, а искомое решение представляет собой произведение:

Ответ: х1=1, х2=1, х3=1.

Задания на практическую работу:

№1Решить системы уравнений методом Крамера.

№2 Решить системы уравнений с помощью обратной матрицы

**Контрольные вопросы:**

1. Что значит решить СЛАУ?
2. Какая система называется совместной?
3. Какая система называется определенной?
4. Как решают систему линейных уравнений методом Крамера?
5. Как решают систему линейных уравнений матричным способом?
6. Что такое обратная матрица?
7. Какую матрицу называют вырожденной?
8. Что называют определителем квадратной матрицы?
9. Как найти матрицу, обратную данной?

.

**Практическая работа №5.**

**Составление интерполяционных формул Лагранжа, Ньютона, нахождение интерполяционных многочленов сплайнами.**

**Цель работы:** Научиться составлять и применять интерполяционные многочлены Лагранжа, Ньютона и оценивать их погрешности, использовать программные средства для проверки полученных результатов.

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

**Перечень необходимых приборов, инструментов, материалов:** ПЭВМ

**Задание на занятие:**

1. Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблично. Найти значение функции в точке а.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант | х0 | х1 | х2 | х3 | у0 | у1 | у2 | у3 | а |
|  | 0,55 | 0,62 | 0,70 | 0,75 | 1,87686 | 2,03045 | 2,22846 | 2,35973 | 0,702 |
|  | 0,02 | 0,08 | 0,12 | 0,17 | 1,02316 | 1,09590 | 1,14725 | 1,21483 | 0,102 |
|  | 0,41 | 0,47 | 0,51 | 0,56 | 2,30080 | 1,96864 | 1,78776 | 1,59502 | 0,482 |
|  | 0,46 | 0,52 | 0,60 | 0,65 | 2,32513 | 2,09336 | 1,86203 | 1,74926 | 0,616 |
|  | 0,73 | 0,80 | 0,88 | 0,93 | 0,89492 | 1,02964 | 1,20966 | 1,34087 | 0,896 |
|  | 0,43 | 0,48 | 0,55 | 0,62 | 1,63597 | 1,73234 | 1,87686 | 2,03045 | 0,512 |
|  | 0,21 | 0,29 | 0,35 | 0,40 | 4,69170 | 3,35107 | 2,73951 | 2,36522 | 0,314 |
|  | 0,35 | 0,41 | 0,47 | 0,51 | 2,73951 | 2,30080 | 1,96864 | 1,78776 | 0,436 |
|  | 0,68 | 0,73 | 0,80 | 0,88 | 0,80866 | 0,89492 | 1,02964 | 1,20966 | 0,774 |
|  | 0,11 | 0,15 | 0,21 | 0,29 | 9,05421 | 6,61659 | 4,69170 | 3,35107 | 0,275 |

1. Задана таблица значений функции f(x) = ex – sin x с верными цифрами:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| х | f(x) | Х | f(x) | х | f(x) | х | f(x) | х | f(x) |
|  |  | 0,4 | 1,1024 | 0,8 | 1,5082 | 1,2 | 2,3881 | 1,6 | 3,9536 |
| 0,1 | 1,0053 | 0,5 | 1,1693 | 0,9 | 1,6763 | 1,3 | 2,7057 | 1,7 | 4,4823 |
| 0,2 | 1,0227 | 0,6 | 1,2575 | 1,0 | 1,8768 | 1,4 | 3,0696 | 1,8 | 5,0758 |
| 0,3 | 1,0543 | 0,7 | 1,3695 | 1,1 | 2,1130 | 1,5 | 3,4842 | 1,9 | 5,7396 |

Используя первую или вторую интерполяционную формулу Ньютона, вычислить приближенное значение функции f(a), оценить погрешность.

**Варианты заданий:**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Вариант |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| а | 0,38 | 1,02 | 1,15 | 1,22 | 1,36 | 0,59 | 0,63 | 0,71 | 0,85 | 0,96 |

**Контрольные вопросы:**

1. В чем суть интерполяции?

2. Что такое узлы интерполяции?

3. Как строится интерполяционный многочлен Лагранжа?

4. Как находятся табличные разности разных порядков через значение функции в узловых точках?

5. Запишите интерполяционные формулы Ньютона.

6. В каких случаях применяется 1-я интерполяционная формула Ньютона, а в каких 2-я?

7. Как производится оценка погрешности метода интерполяции?

**Практическая работа №6.**

**Вычисление интегралов методами численного интегрирования.**

**ЦЕЛЬ:**Приобретение навыков вычисления интегралов приближенными методами.

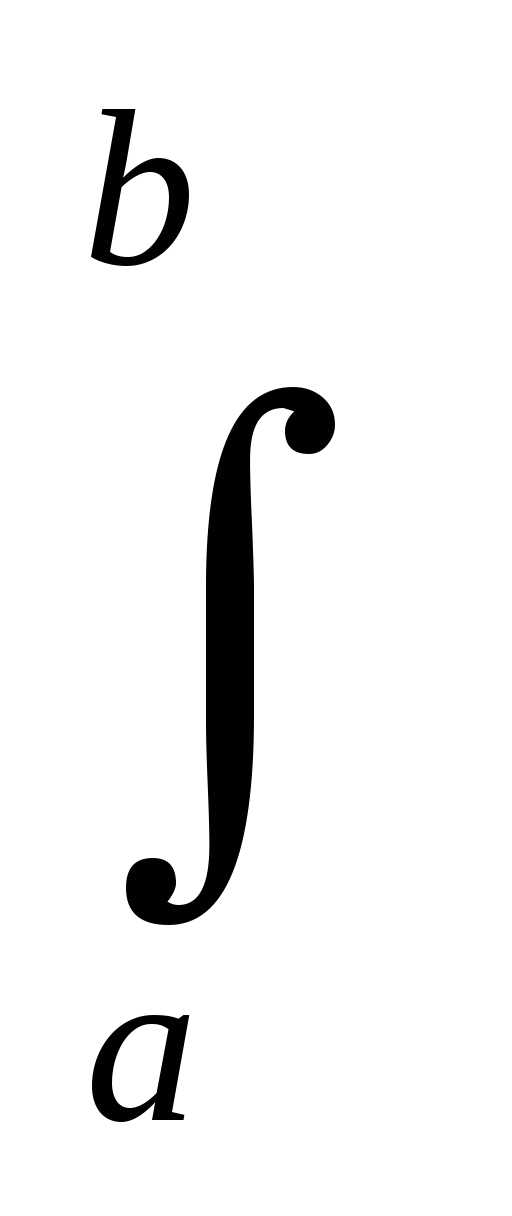
**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:**Программа MS Office Excel.

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

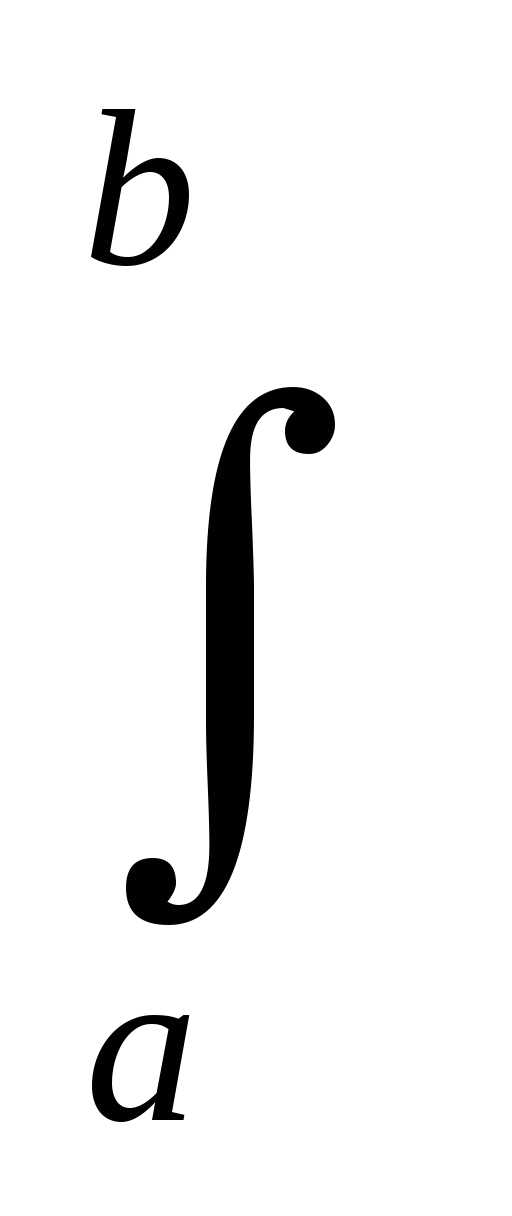
**Время выполнения:** 2 ч

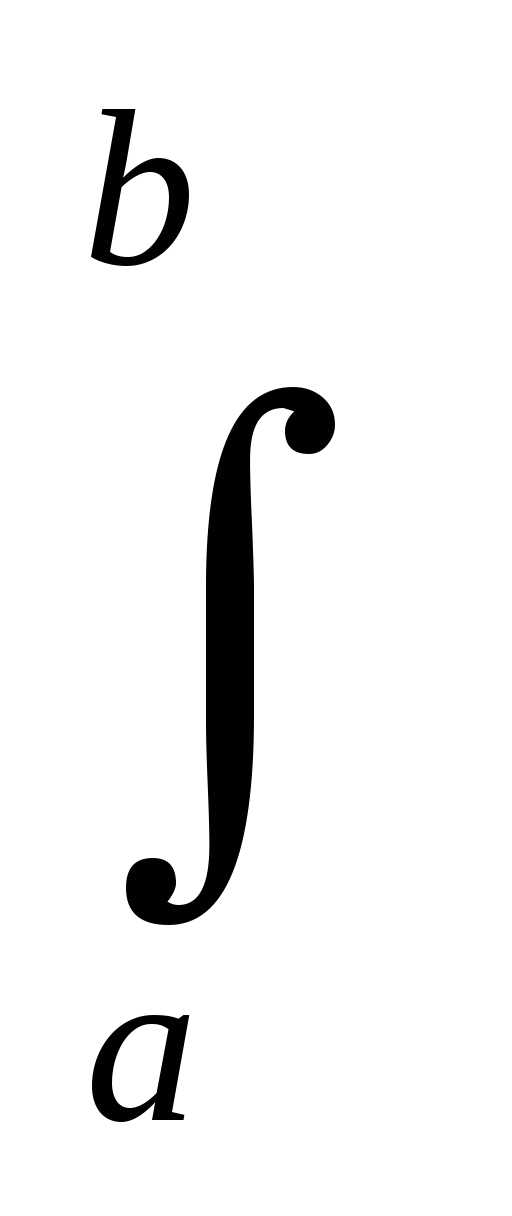
**КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:**

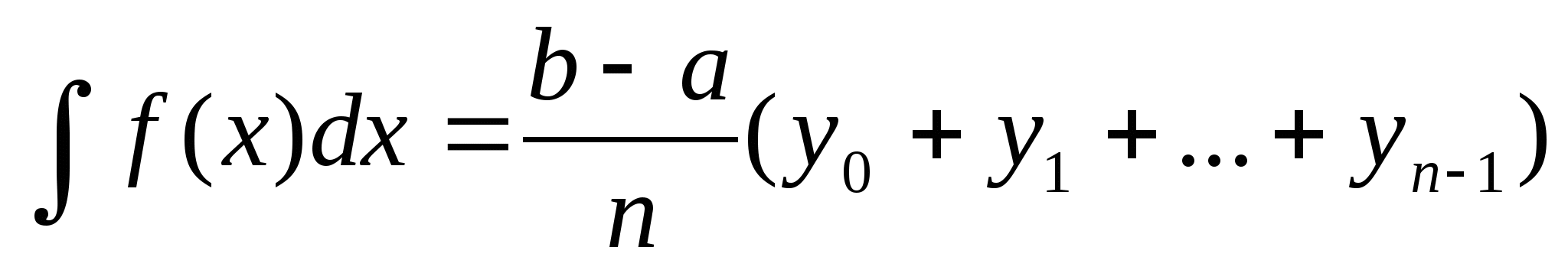
Всякая непрерывная на отрезке [a,b] функция f интегрируема на отрезке [a,b], если функция f неотрицательна, то определённый интеграл  численно равен S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f, осью абсцисс и прямыми x=aи x=b, S=f(x)dx.

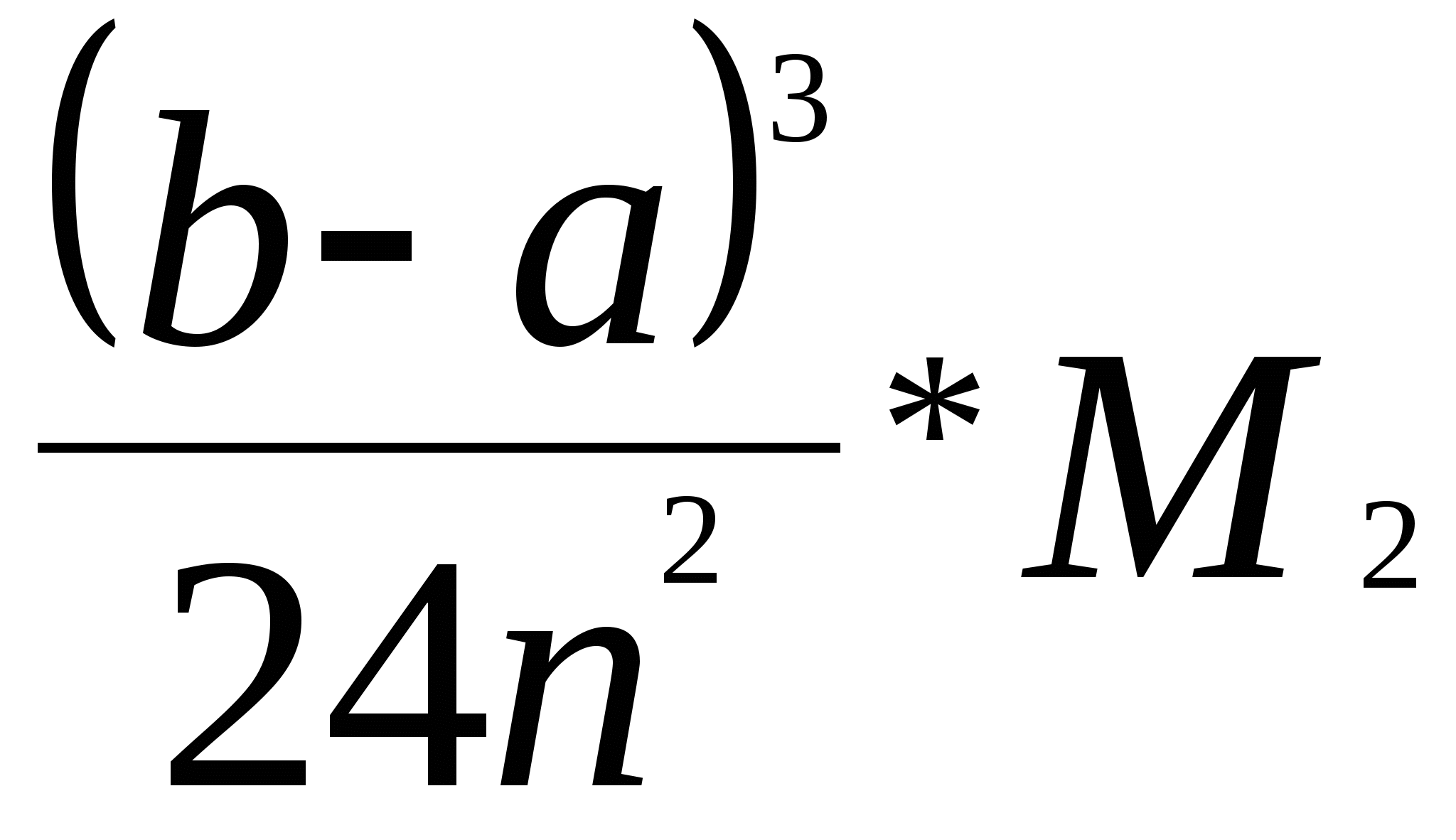
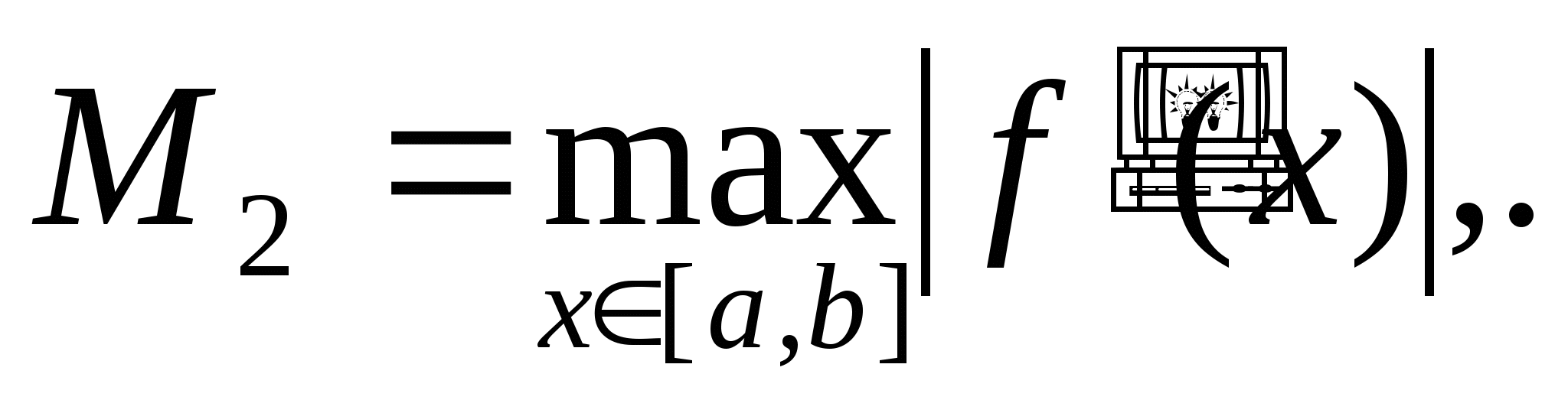
Однако не всякая элементарная функция f имеет элементарную первообразную F. Часто на практике сталкиваются с вычислением интегралов от функций, которые заданы табличными и графическими способами, или интегралы от функций, первообразные которых выражаются через элементарные функции очень сложно. В этих случаях прибегают к различным методам приближённого интегрирования.

1. *Формула прямоугольников*

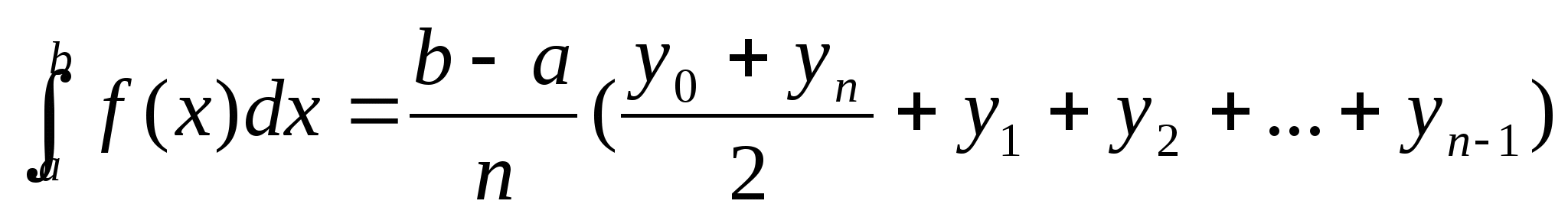
f(x)dx≈((b-a)/n)(y0+y1+…+yn-1) – формула внутренних прямоугольников

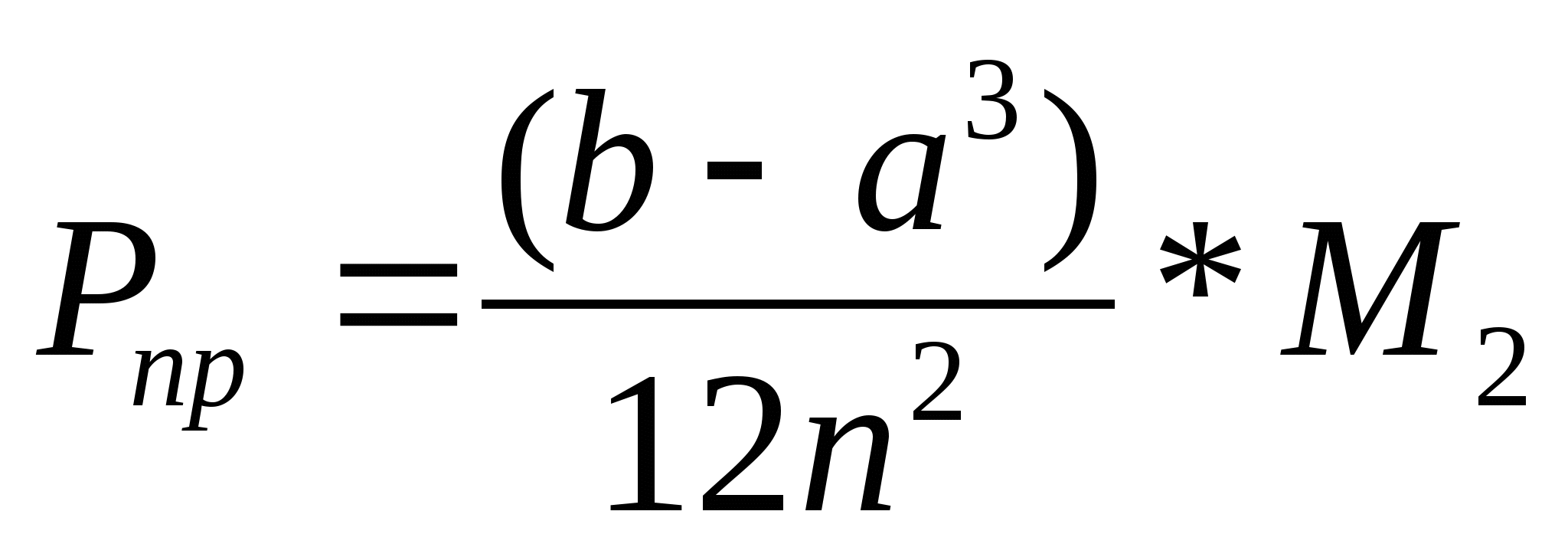
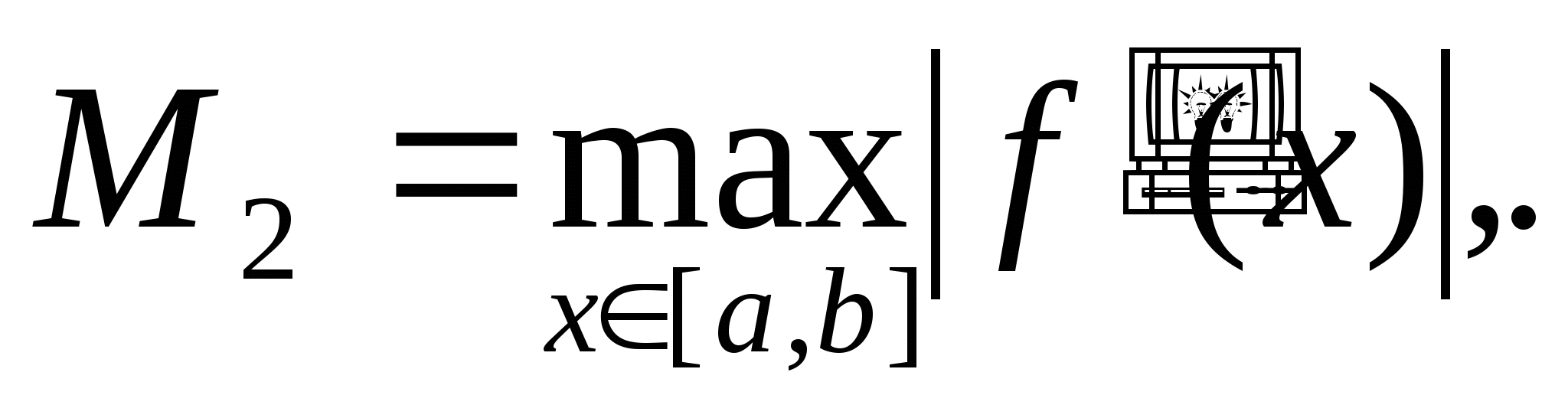
f(x)dx≈((b-a)/n)(y1+y2+…+yn) – формула внешних прямоугольников.

- формула средних прямоугольников.

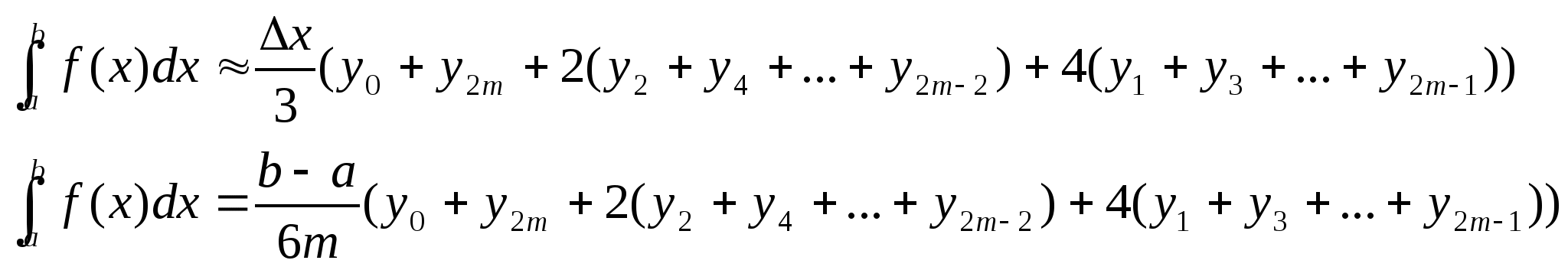
Погрешность вычисляется по формуле Pnp=, где 

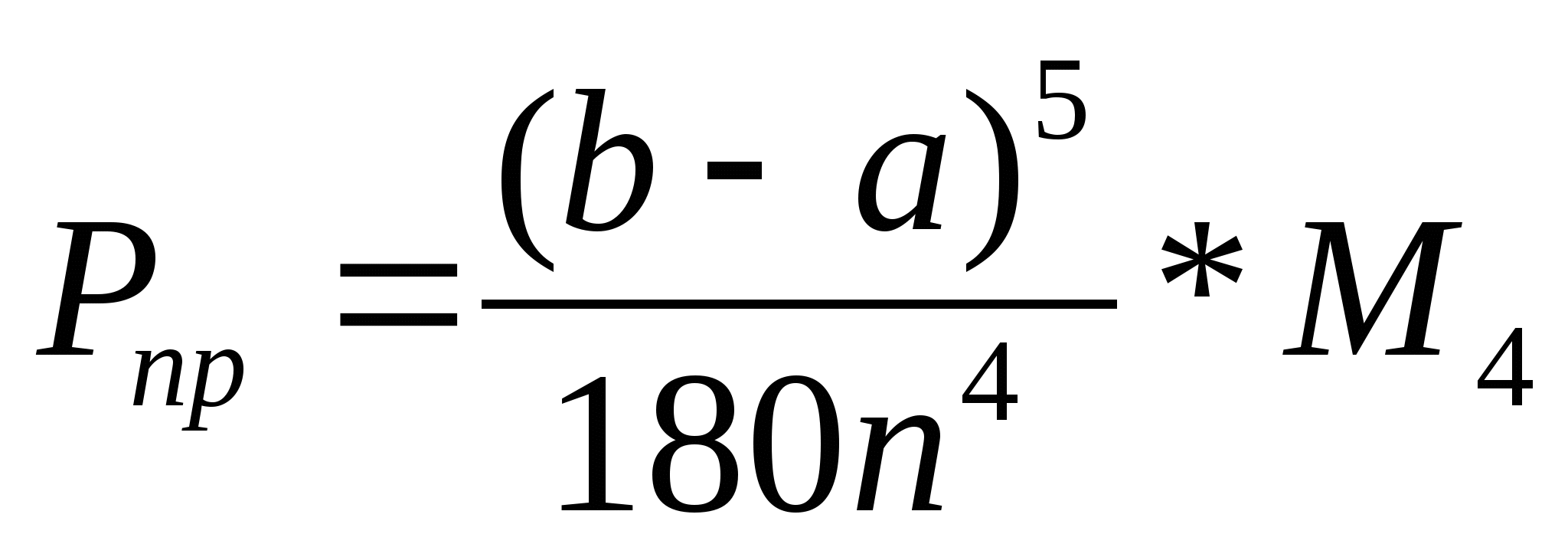
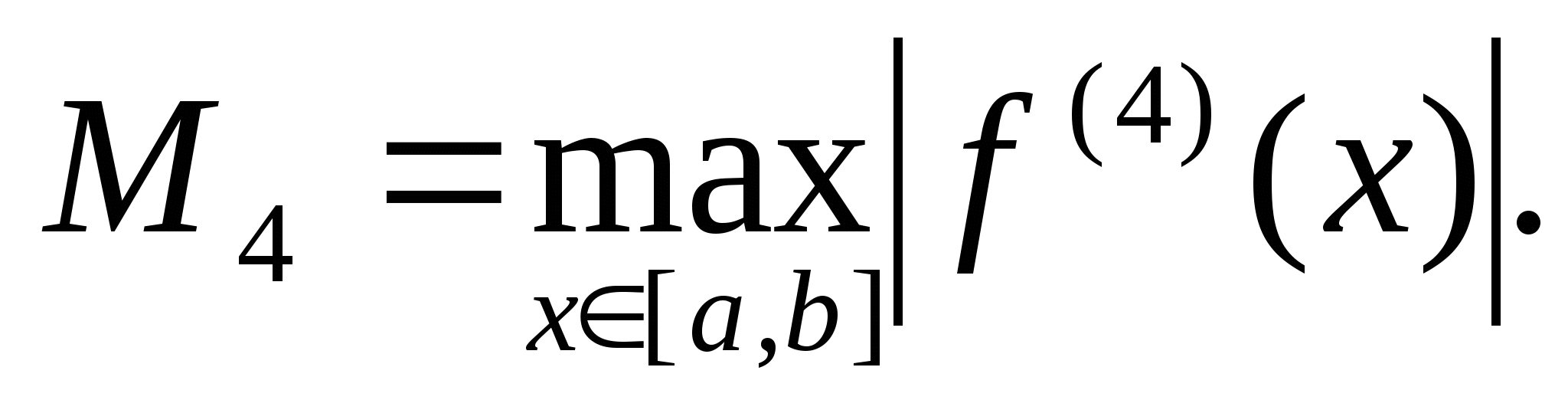
*2. Формула трапеций.*



Для определения погрешности интеграла, вычисленного с помощью формулы трапеций, используется формула: где 

*3.Формула Симпсона (формула парабол).*



Погрешность для этого метода находится по формуле: где 

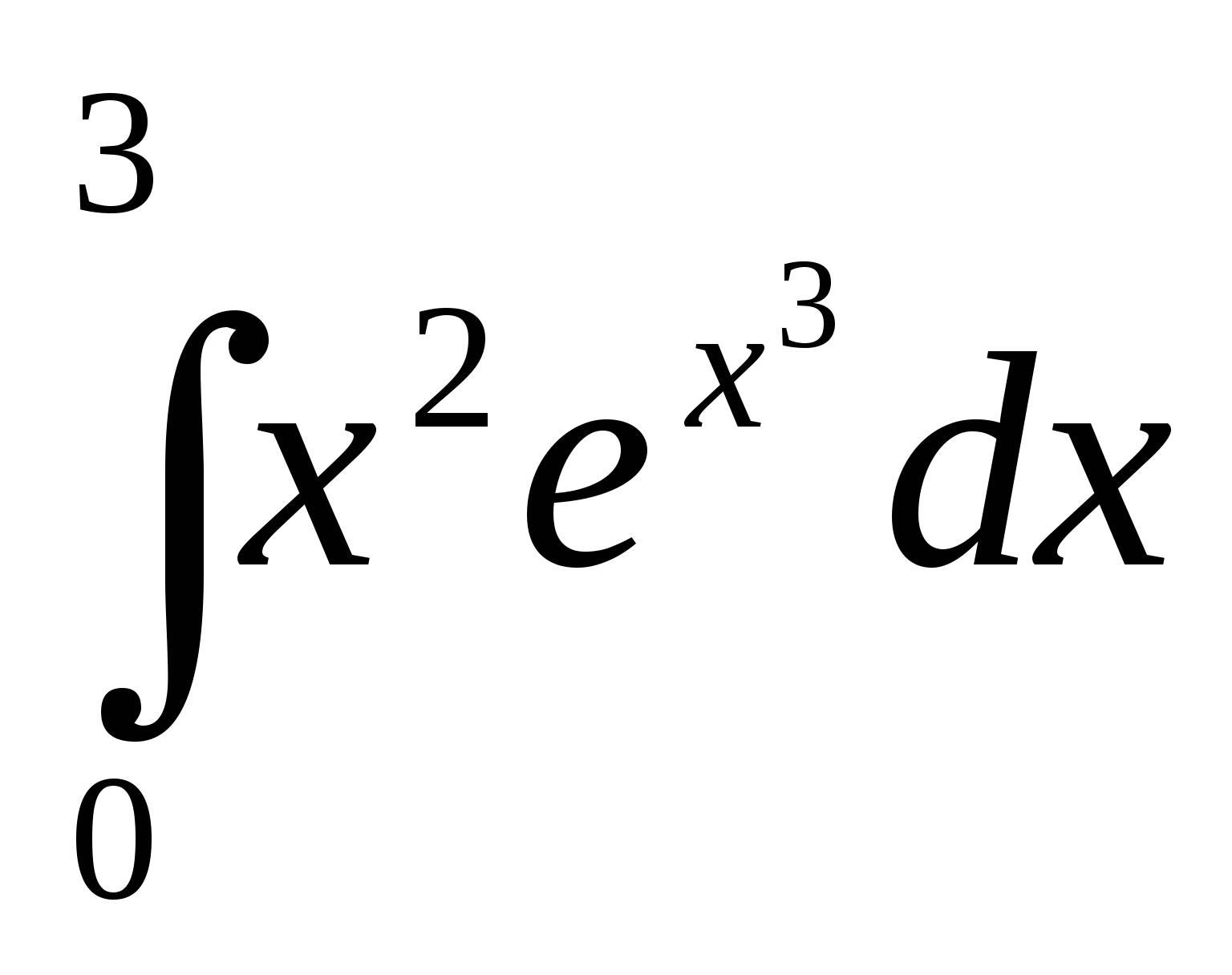
**СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:**

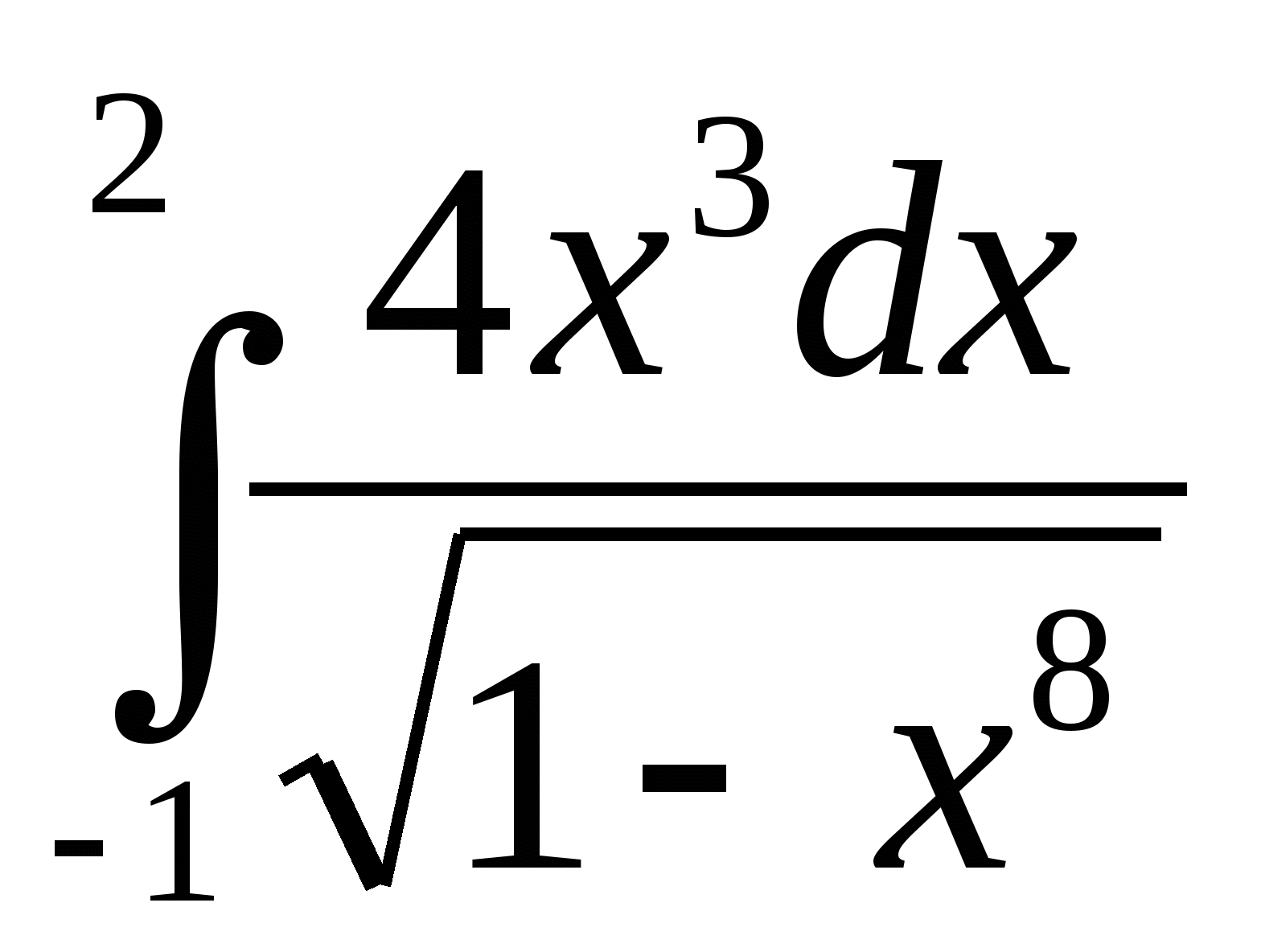
1. Получить вариант у преподавателя.
2. Вычислить точное значение интеграла одним из известных способов.
3. Вычислить интеграл с использованием формул Ньютона-Котеса (формула прямоугольников (входящих, исходящих, средних), формула трапеций, формула парабол).
4. Найти погрешность интегрирования каждого способа.

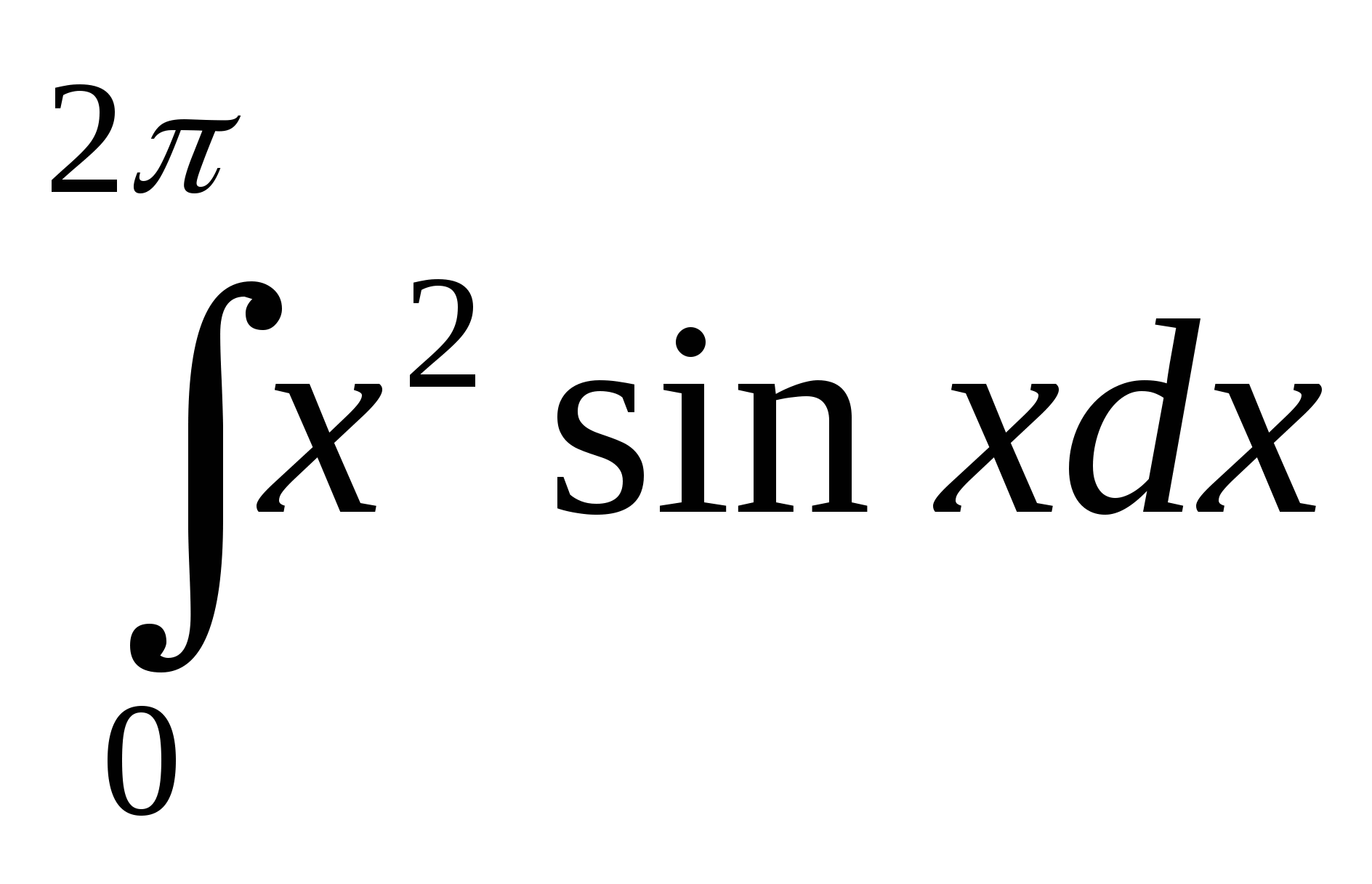
**ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:**

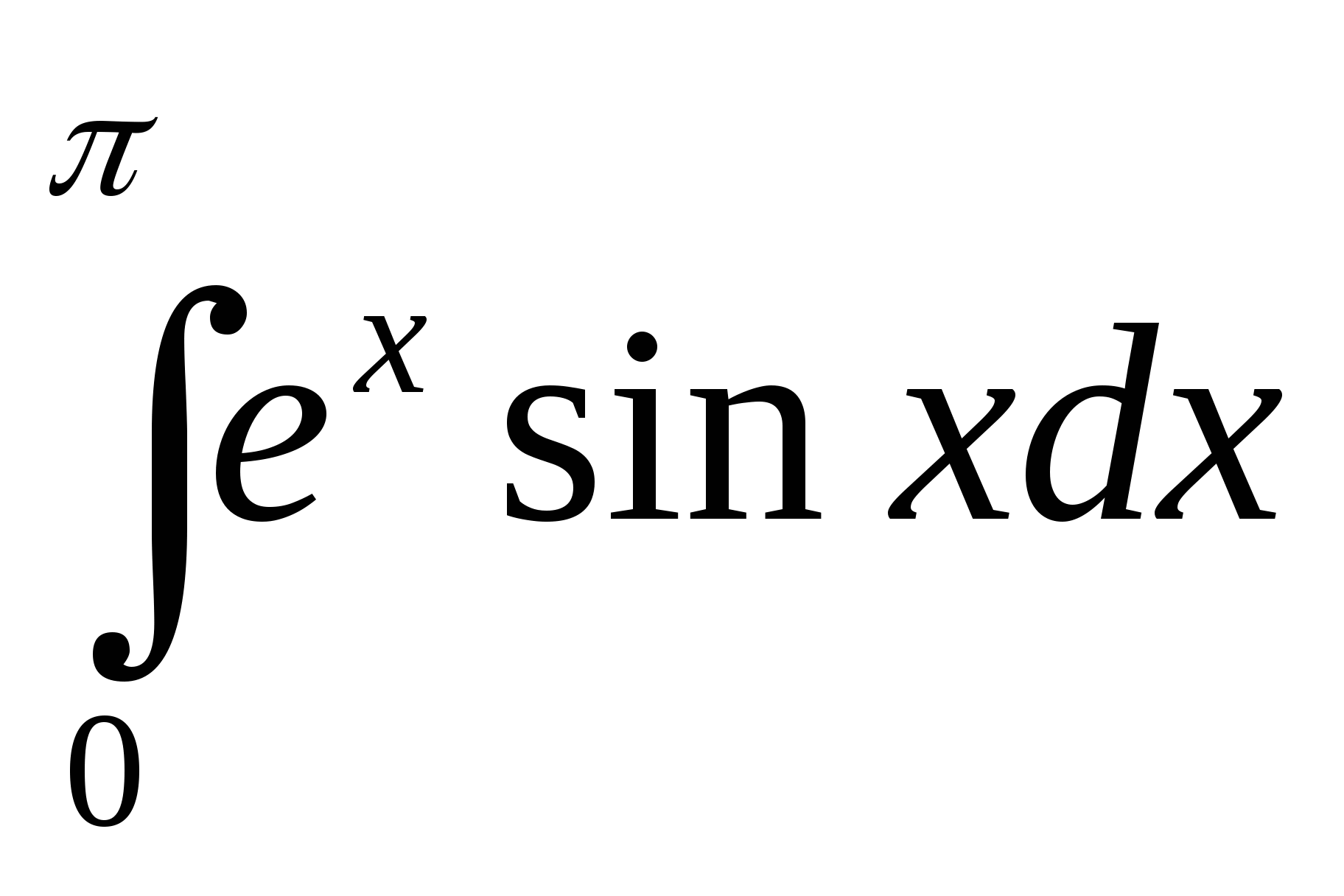
1. Изучить материал лекции.
2. Ознакомиться с заданиями практической работы.
3. Изучить методические указания.
4. Выполнить задания.
5. Ответить на контрольные вопросы.
6. Оформить отчет по проделанной работе.

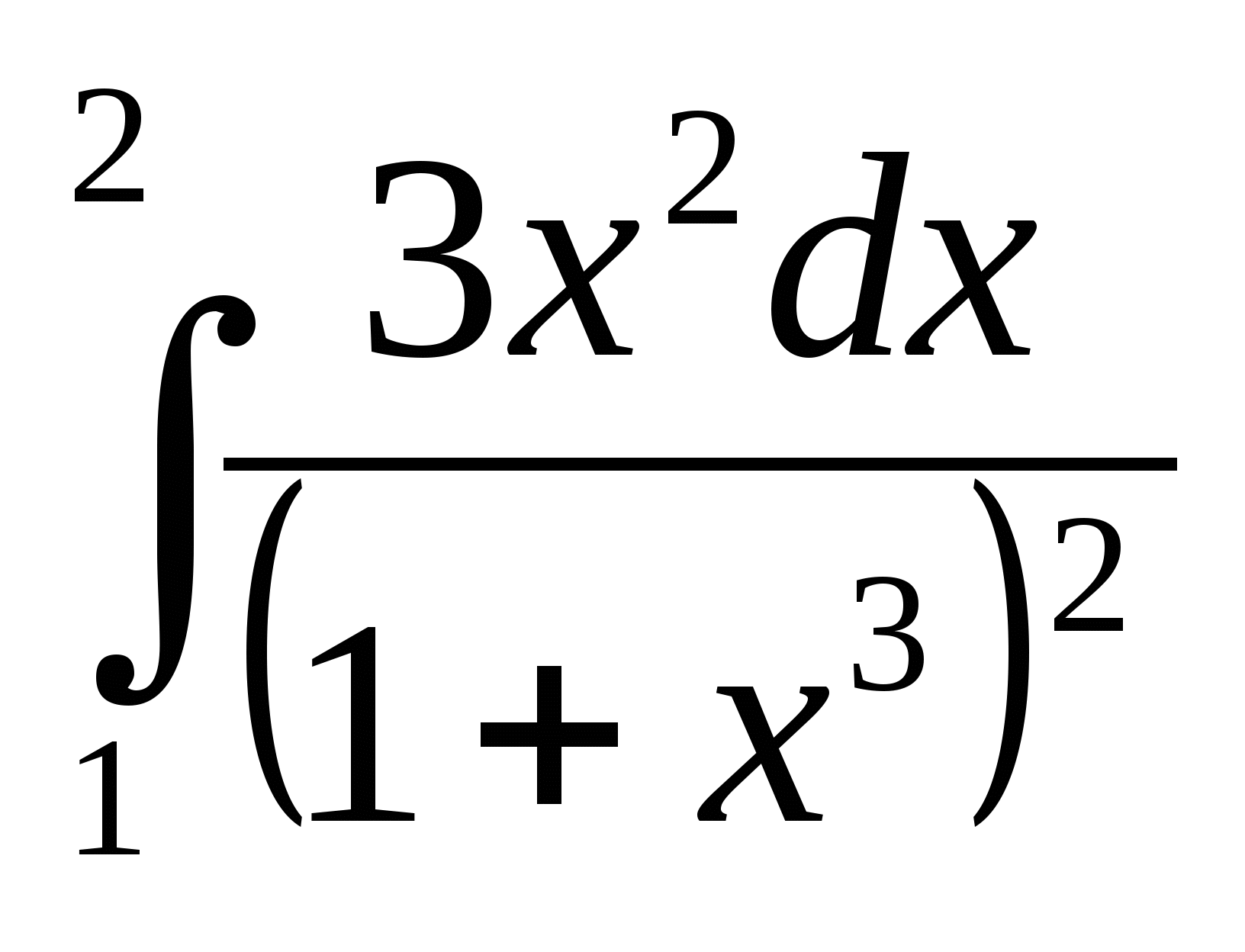
**ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**

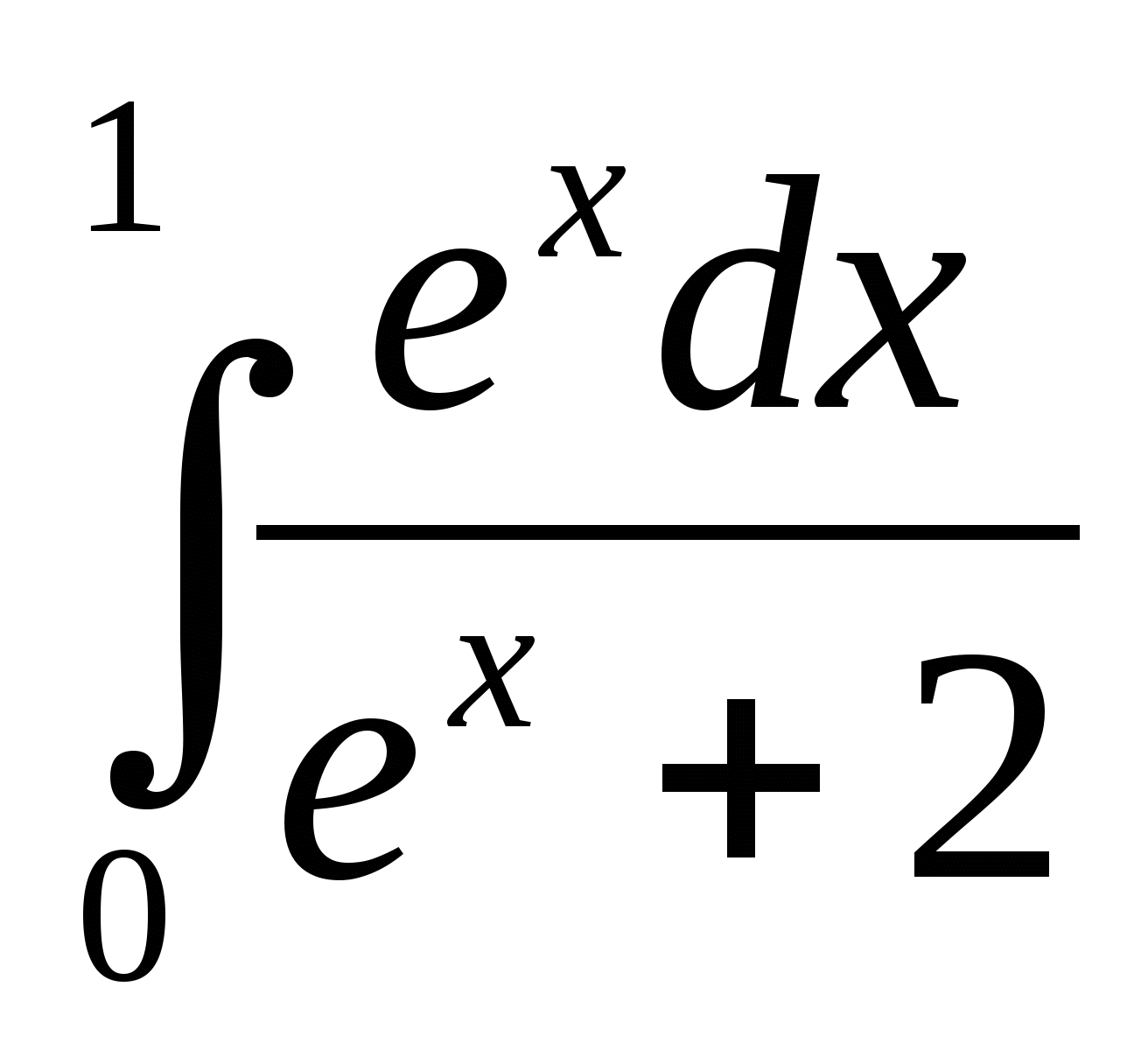
1 вариант. ****

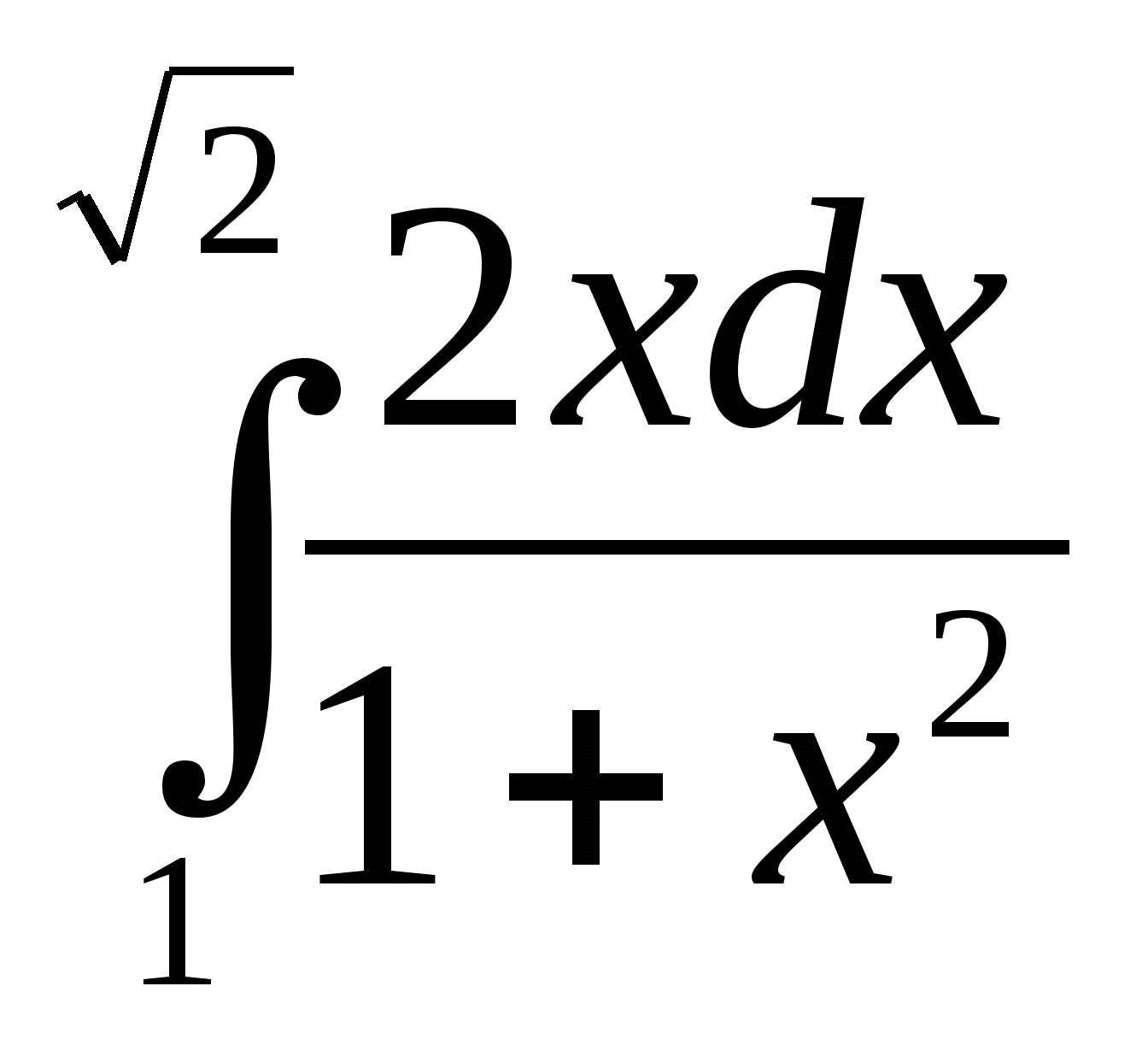
2 вариант. ****

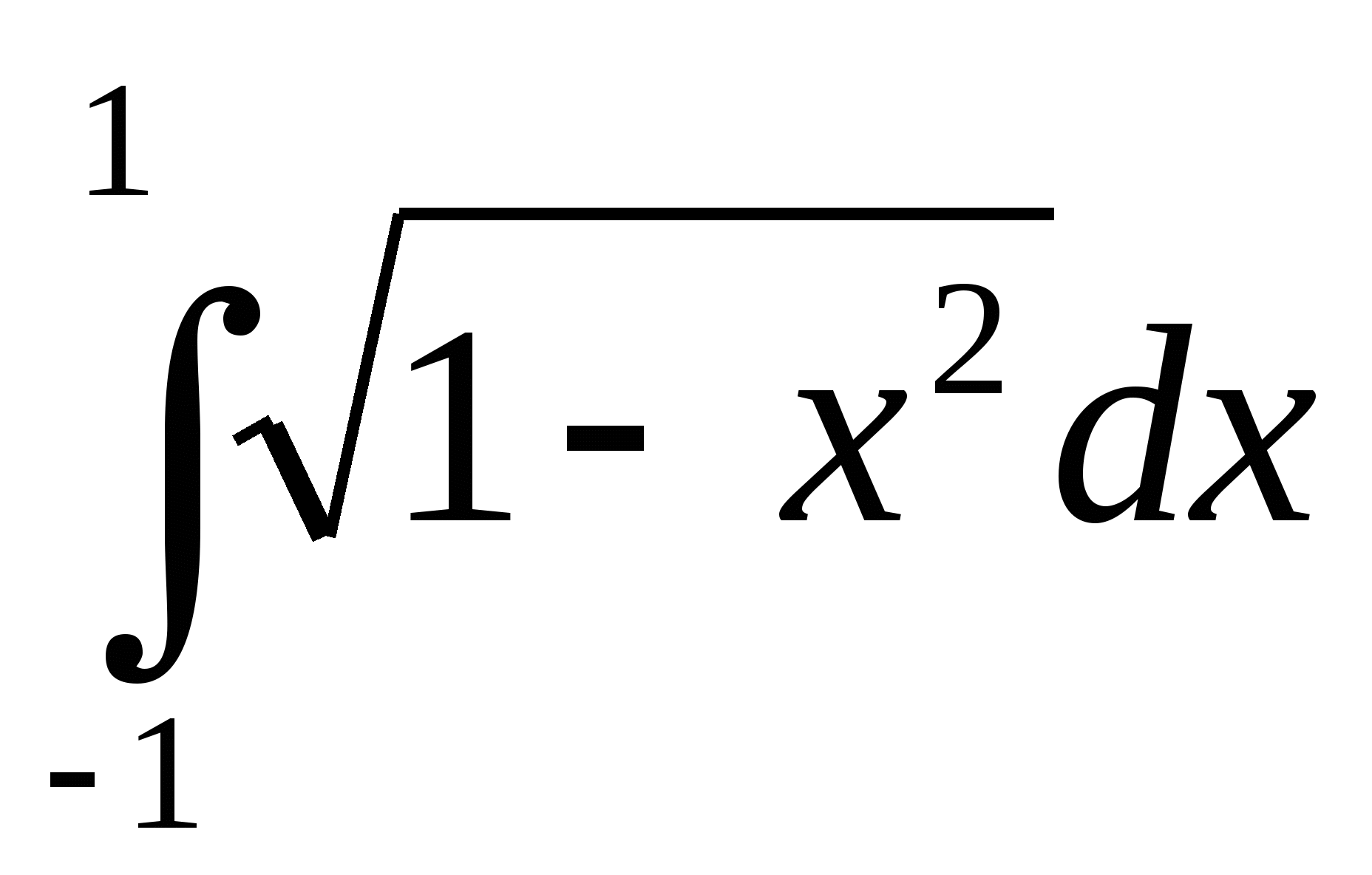
3 вариант. ****

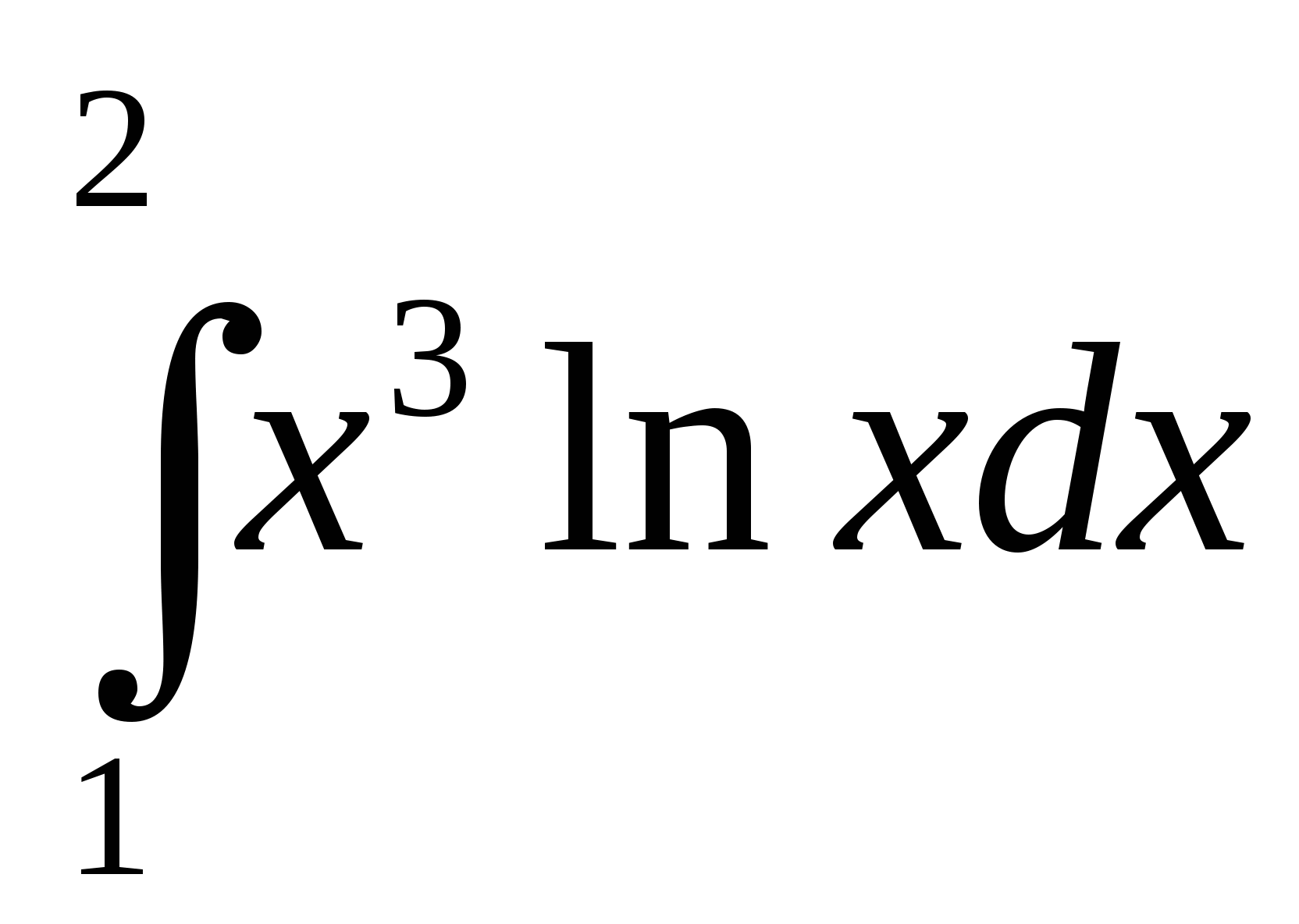
4 вариант. ****

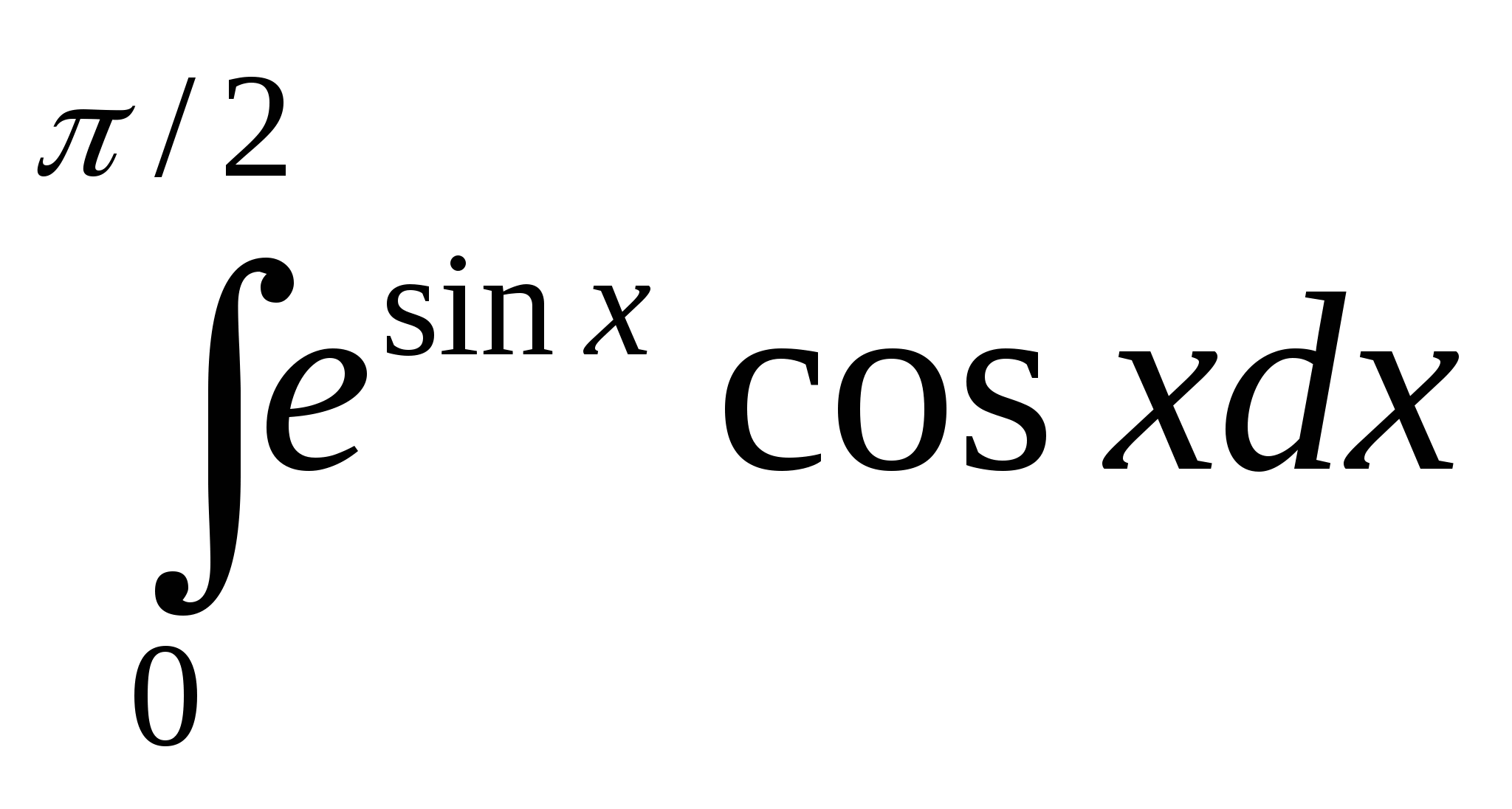
5 вариант. ****

6 вариант. ****

7 вариант. ****

8 вариант. ****

9 вариант. ****

10 вариант. ****

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. В каких случаях применяются приближенные методы численного интегрирования?
2. Как вычисляется погрешность вычисления интегралов приближенными методами?
3. От чего зависит точность вычислений?

**Практическая работа №7.**

**Применение численных методов для решения дифференциальных уравнений.**

**ЦЕЛЬ**:Закрепить навыки решения обыкновенных дифференциальных уравнений различными методами.

**ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ:**Программа MS Office Excel.

**Форма отчета:**

* титульный лист;
* содержание;
* введение (актуальность, цель, задачи);
* теоретическая часть (ответы на контрольные ворпосы);
* практическая часть (выполненные задания и скрины (кнопка PrtScr) использованных элементов);
* заключение;

**Время выполнения:** 2 ч

**КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ:**

Решить дифференциальное уравнение у/=f(x,y) (1) численным методом   значит для заданной последовательности аргументов х0, х1…, хn и числа у0, не определяя функцию у=F(x), найти такие значения у1, у2,…, уn, что уi=F(xi)(i=1,2,…, n) и F(x0)=y0.

Величина h=xk-xk-1называется шагом интегрирования.

***Метод Эйлера*** относиться к численным методам, дающим решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции у(х).

Рекуррентные формулы метода Эйлера:

ук+1=ук+αкh

xk+1=xk+h

αk=f(xk+h/2, yk+f(xk,Yk)h/2)

yk=yk-1+f(xk-1,yk-1)h

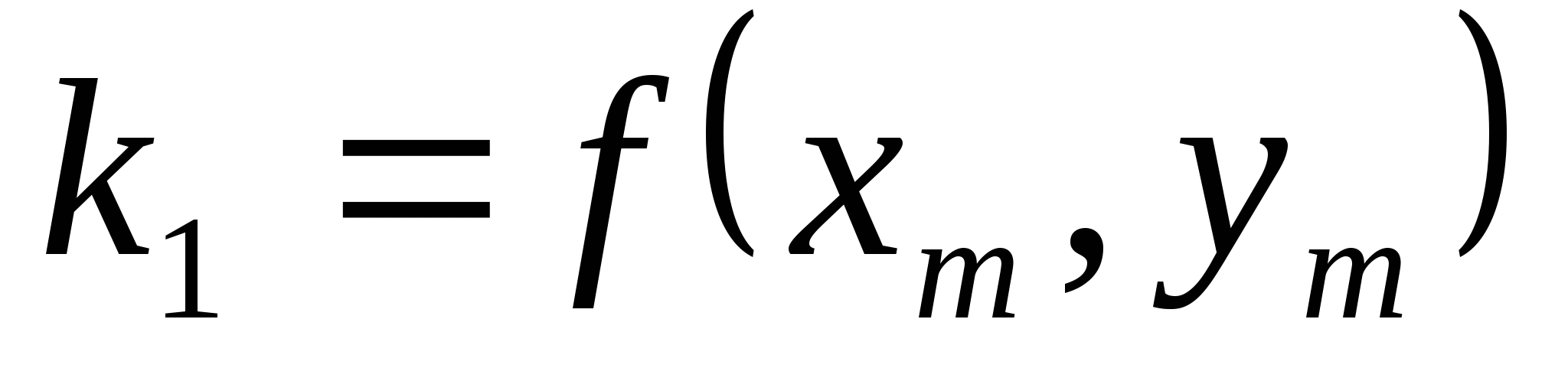
Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции ук+1/2 в точках хк+1/2, затем находят значение правой части уравнения (1) в средней точке y/k+1/2=f(xk+1/2, yk+1/2) и определяют ук+1.

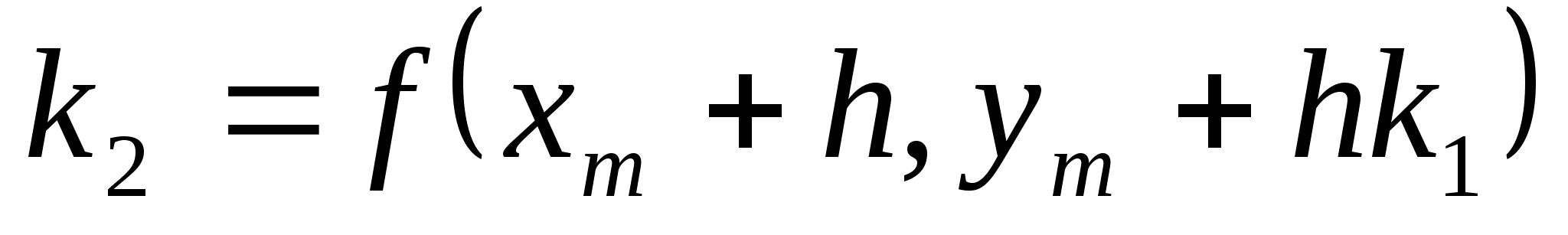
Для оценки погрешности в точке хк проводят вычисления ук с шагом h, затем с шагом 2h и берут 1/3 разницы этих значений:

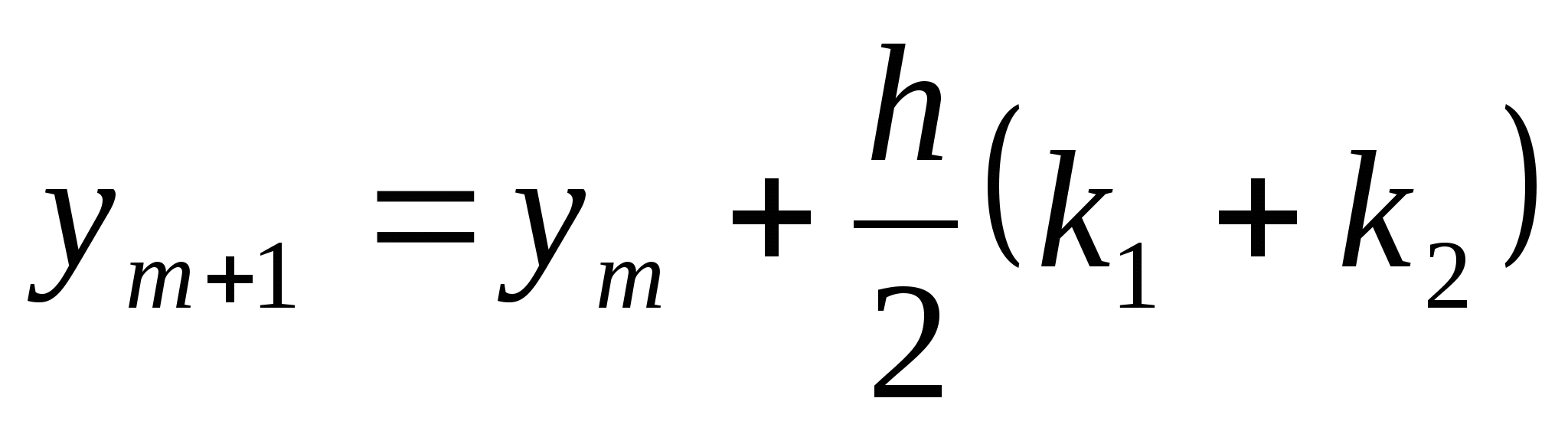
| ук\*-у(хк)|=1/3(yk\*-yk),

где у(х)-точное решение дифференциального уравнения.

***Метод Рунге–Кутта 2-го порядка.***Состоит в последовательных расчетах по формулам



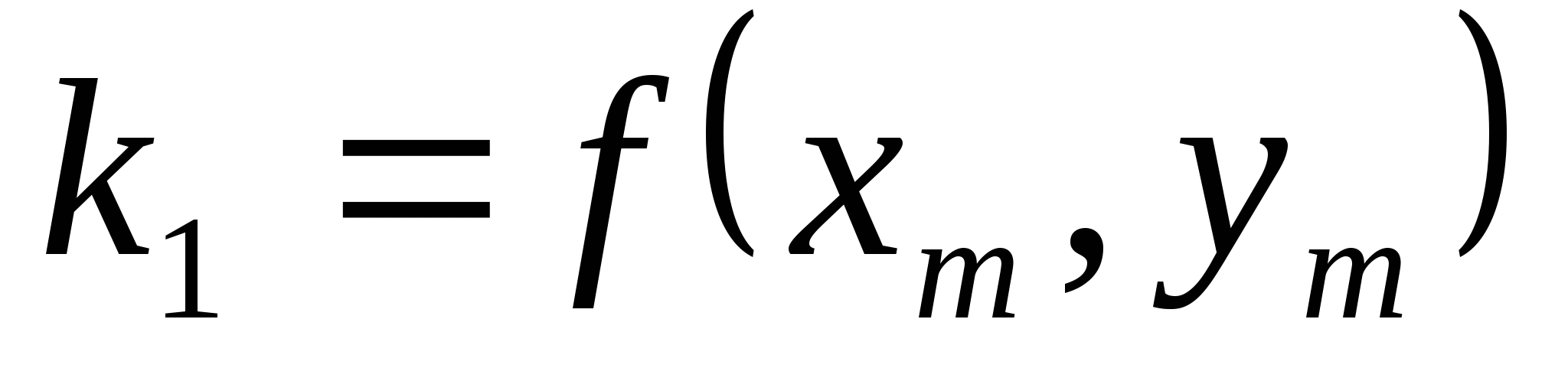


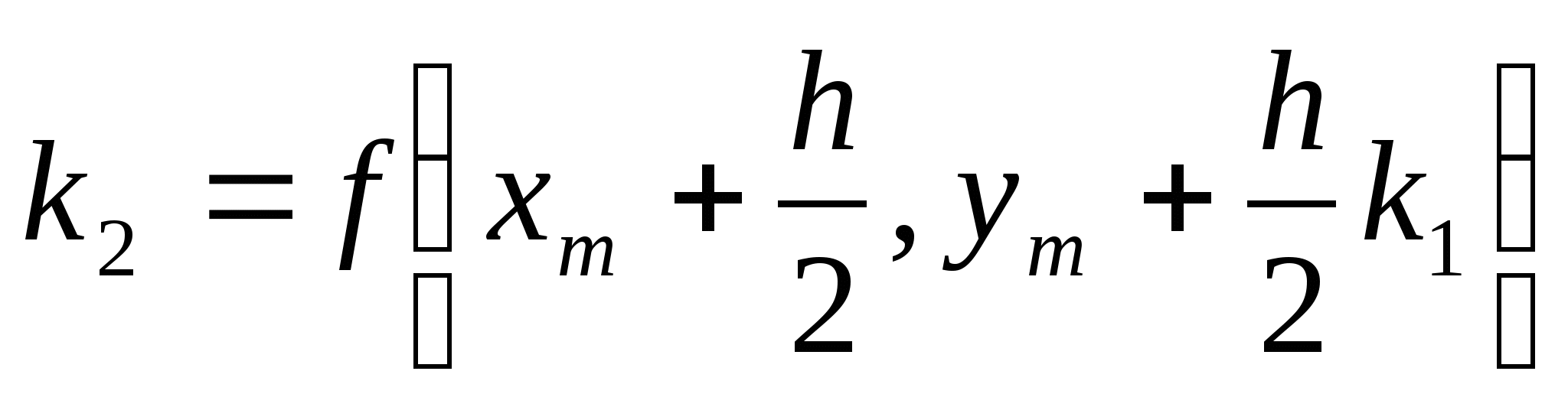


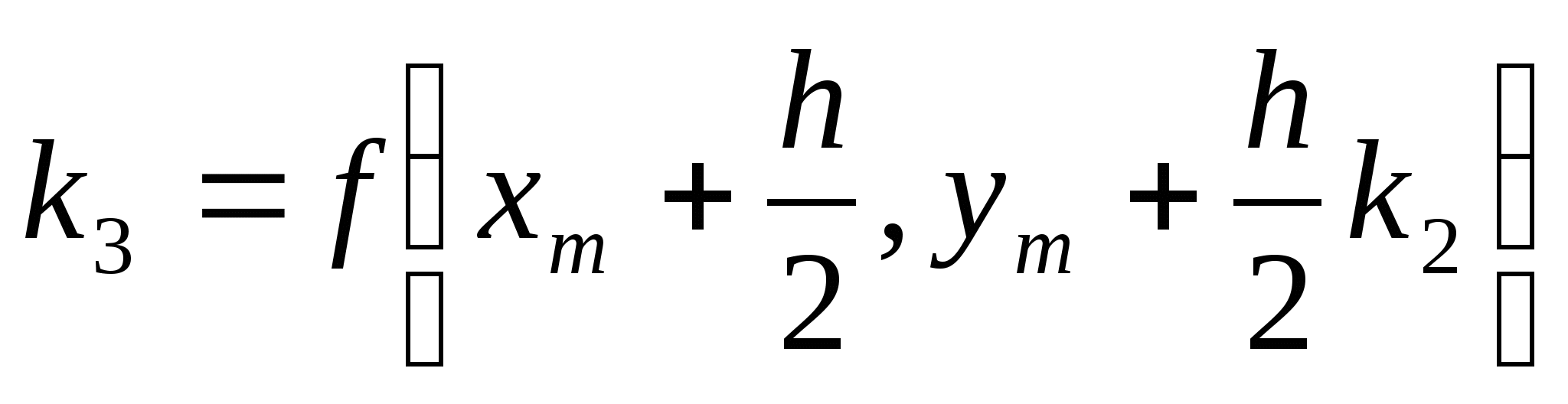
начиная с точки (*x0, y0)*.

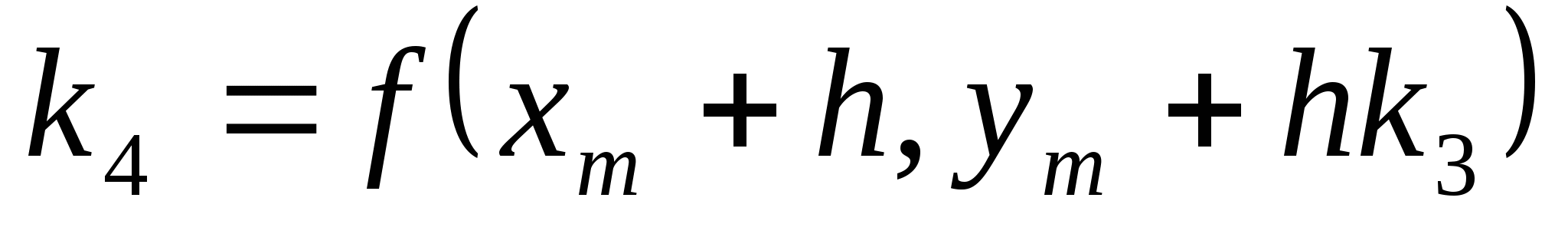
Метод Рунге–Кутта 2-го порядка имеет погрешность порядка *kh3*.

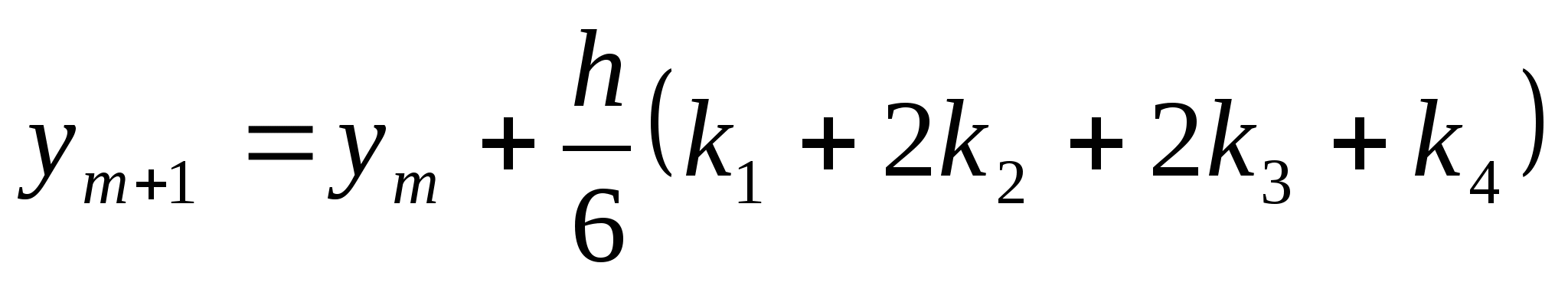
***Метод Рунге–Кутта 4-го порядка.***Состоит в последовательных расчетах по формулам:











начиная с точки (*x0, y0)*.

Метод Рунге–Кутта 4-го порядка имеет погрешность порядка *kh5*

**СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ:**

1. Получить варианты заданий у преподавателя.
2. Решить дифференциальное уравнение методом Эйлера и методом Рунге-Кутта 4-го порядка (n=5).
3. Определить погрешности вычислений.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ:

1. Изучить материал лекции.
2. Ознакомиться с заданиями практической работы.
3. Изучить методические указания.
4. Выполнить задания.
5. Оформить отчет по проделанной работе.

**ЗАДАНИЯ ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ:**

№ варианта

Уравнение

1

hello_html_m14aae0fc.gif

2

hello_html_m26cc1f9c.gif

3

hello_html_61965e07.gif

4

hello_html_6d1b6fdb.gif

5

hello_html_m60ae2366.gif

6

hello_html_m6b2c15d.gif

7

hello_html_225e6fb4.gif

8

hello_html_804d0f0.gif

9

hello_html_m13434334.gif

10

hello_html_m3a5aaf1a.gif

11

hello_html_m72bb6274.gif

12

hello_html_mc087d8b.gif

13

hello_html_6ea0dd22.gif

14

hello_html_59608c7c.gif

15

hello_html_m3385024d.gif

16

hello_html_50f5c9d6.gif

17

hello_html_m1877aea3.gif

18

hello_html_5e7a0679.gif

19

hello_html_349836ac.gif

20

hello_html_207fdecb.gif

21

hello_html_m4b7b2f9d.gif

22

hello_html_1162a26e.gif

23

hello_html_m4bf2f5b3.gif

24

hello_html_3a72f9af.gif

25

hello_html_491ea3c0.gif

26

hello_html_m3f0ae988.gif

27

hello_html_464d98b0.gif

28

hello_html_m1c313292.gif

29

hello_html_2b5530d2.gif

30

hello_html_m821e02f.gif

**КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ**

1. Какое решение дифференциального уравнения называют общим решением? Какое – частным?
2. В чем принципиальное отличие методов Эйлера и Рунге-Кутта?
3. Как вычислить погрешности вычислений при применении методом Эйлера и Рунге-Кутта?

**Список литературы**

1. Колдаев В.Д.; Под ред. Гагариной Л.Г., Численные методы и программирование: Учебное пособие / Колдаев В.Д.; Под ред. Гагариной Л.Г. — М.:ИД ФОРУМ, НИЦ ИНФРА-М, 2016. — 312 с. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Знания» : [Электронный ресурс]. — URL: https://znanium.com/bookread2.php?book=546692.
2. Н.П. Савенкова, О.Г. Проворов, Численные методы в математическом моделировании : учеб. пособие / С.В. Назаров, А.И. Широков. — 2-е изд. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 351 с. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [Электронный ресурс]. — URL: https://znanium.com/bookread2.php?book= 774278.
3. А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова, Введение в численные методы в задачах и упражнениях : учеб. пособие/ А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 140 с.— Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [Электронный ресурс]. — URL: https://znanium.com/bookread2.php?book=883943.
4. А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцев. Численные методы. Практикум : учеб. пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцев – М. : ИНФРА-М, 2017. – 312 с. : ил. – [Электронный ресурс]. – URL: https://znanium.com/bookread2.php?book=652316.
5. Карманова, Е.В. Введение в численные методы : учебно-методическое пособие / Е.В. Карманова, С.А. Повитухин. — Москва : ФЛИНТА, 2017. — 81 с. — ISBN 978-5-9765-3696-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/104909
6. Бахвалов, Н.С. Численные методы. Решения задач и упражнения : учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.А. Корнев, Е.В. Чижонков. — 2-е изд. — Москва : Лаборатория знаний, 2016. — 355 с. — ISBN 978-5-93208-205-8. — Текст : электронный // Электронно-библиотечная система «Лань» : [сайт]. — URL: https://e.lanbook.com/book/90239